日本オペレーションズ・リサーチ学会
2021年 春季研究発表会

消費資源付き単一機械スケジューリング問題に対する近似アルゴリズム

05001029　東京工業大学　*橋本　進　HASHIMOTO Susumu
01603800　東京工業大学　水野 眞治　MIZUNO Shinji

1. はじめに

スケジューリング問題とは，複数のジョブとそれを処理できる機械が与えられたときに，制約を満たしながら目的関数値ができるだけ良くなるように，どの仕事をいつ（どの）機械に処理させるかを決定する問題である．この問題は計算困難な問題として知られており，実務で現れるような複雑な問題のほとんどは，理論的にも実験的にも最適解を求めることは非常に難しい．そのため，問題を単純化して，その理論的な性質を調べるという研究が盛んに行われている．

消費資源 (non-renewable resource) とは，ジョブを処理するために消費される資源を指す．工場での商品の生産を考えると，商品の原料や仕掛品・機械の燃料などが消費資源と見なすことができる．したがって，ほとんどの実務の生産スケジューリングに現れる概念であるといえる．本発表では，このような消費資源が工場等に十分に無く，不足分が後日に供給されるような状況の下での単一機械スケジューリング問題を扱う．この問題は，単一機械で消費資源が 1 種類という単純な問題においても，様々な目的関数で NP-hard であることが知られている [1][3]．そのため，厳密解法ではなく，近似アルゴリズムの研究が進められている．その中でも，処理完了時間の重み和を目的関数にした問題は未だに定数近似アルゴリズムが見つかっておらず，特殊な制約を持つ問題が研究されている．

Györgyi と Kis[3] は，ある特殊な消費資源付き単一機械スケジューリング問題に対して，あるリストスケジューリングアルゴリズムが 3-近似アルゴリズムであることを示し，実際には 2-近似アルゴリズムであることを予想した．本発表では，この予想が正しいことを証明する．

2. 問題設定

本発表で扱う問題設定を説明する．消費資源付き単一機械スケジューリング問題は N 個のジョブ $\mathcal{J} = (J_1, J_2, \ldots, J_n)$ と 1 つの機械，そして消費資源の到着スケジュールから成る．各ジョブ J_j は処理時間 $p_j > 0$，重み $w_j > 0$，資源消費量 $a_j > 0$ を持つ．消費資源の到着スケジュールは，到着時刻 $u_1, u_2, \ldots, u_q \quad \geq 0$ と，各添字に対応する到着量 $b_1, b_2, \ldots, b_q > 0$ で構成される．目的関数は $\sum_{j=1}^{n} w_j C_j$ の最小化である．ただし，$C_1, C_2, \ldots, C_n$ はそれぞれジョブ $J_1, J_2, \ldots, J_n$ の処理完了時刻である．制約は以下の通りである．ジョブの処理を中断することはできない．また，機械は 2 つ以上のジョブを同時に処理できない．さらに，ジョブ J_j の処理を開始するためには，a_j の資源を消費しなければならない．この制約は，次の不等式と等価である：

$$\sum_{j:C_j - p_j \leq T} a_j \leq \sum_{i:u_i \leq T} b_i \text{ for any } T \geq 0. \qquad (1)$$

最後に，

Assumption 1 $\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{q} b_i$.

を仮定する．これは，実行不能なインスタンス (資源量の不足) や，スケジューリングに影響しない余剰資源を除くための制約である．この問題は，Graham ら [2] の記法を用いて $1|nr = 1|\sum w_j C_j$ と書ける．ここで，$nr = 1$ は消費資源が 1 種類あることを意味する．

2.1. リストスケジューリングアルゴリズムと先行研究

本発表で扱う近似アルゴリズムは，次のリストスケジューリングアルゴリズムである．

Algorithm 1 入力：$1|nr=1|\sum w_jC_j$ のインスタンス
出力：処理完了時刻 $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$

Step 1: ジョブを w_j が降順になるように並び替える．並び替えたジョブの添字の列を $(o(1), o(2), \ldots, o(n))$ とする．

Step 2: $j=0$, $C_0=0$, $o(0)=0$　とする．

Step 3:

$$C_{o(j+1)} = \min\left\{T \middle| T \geq C_{o(j)},\ \sum_{i=1}^{j+1} a_{o(i)} \leq \sum_{i:u_i \leq T} b_i\right\} + p_j$$

を計算する．

Step 3: $j=n-1$ であれば終了する. そうでなければ，$j=j+1$ として *Step 3* に戻る.

簡単に言えば，Algorithm 1 は w_j の降順に処理されるという条件を守りながら，できるだけ早くそれぞれのジョブが処理開始できる時間に処理させるというアルゴリズムである．

Györgyi と Kis[3] は，$1|nr=1, q=2, w_j=a_j, p_j=1|\sum w_jC_j$ が (weakly) NP-hard であることと，Algorithm 1 が $1|nr=1, w_j=a_j, p_j=1|\sum w_jC_j$ に対する 3-近似アルゴリズムであることを示した．また，この近似比が 2 まで改善できると予想した．

3.　結果と証明概略

次の定理が，本発表の主要な結果である．

Theorem 1 S を $1|nr=1, w_j=a_j, p_j=1|\sum w_jC_j$ の任意のインスタンスとする．S の最適値を *OPT*, S に対する *Algorithm 1* の目的関数値を *ALG* とする．このとき，$ALG < 2 * OPT$ が成り立つ．

Theorem 1 は，Algorithm 1 が $1|nr=1, w_j=a_j, p_j=1|\sum w_jC_j$ の 2-近似アルゴリズムであることを含んでいるため，Györgyi と Kis の予想を肯定的に解決するものである．詳しい証明は発表中に行い，本稿では Theorem 1 の証明の概略を説明するにとどめる．

Theorem 1 の証明では，まず次の定理を示す．

Theorem 2 S' を $1|nr=1, q=n, w_j=a_j=b_i, p_j=1, u_i=i-1|\sum w_jC_j$ のインスタンスとし，S' の最適値を OPT', S' に対する *Algorithm 1* の目的関数値を ALG' とする．もし，$ALG' < 2 * OPT'$ が任意の S' について成り立てば，*Theorem 1* は真である．

Theorem 2 が成り立てば，Theorem 1 の証明において，考慮すべきインスタンスを限定することができる．最後に，限定されたインスタンスの特徴に注目して，数学的帰納法などで Theorem 1 を証明する．

4.　まとめと今後の課題

本発表は，Györgyi と Kis[3] の予想を肯定的に解決した．すなわち，Algorithm 1 が $1|nr=1, w_j=a_j, p_j=1|\sum w_jC_j$ の 2-近似アルゴリズムであることを示した．本発表で扱った問題よりさらに一般的な問題，例えば $1|nr=1, p_j=1|\sum w_jC_j$ などについて定数近似アルゴリズムが存在するかどうかを今後の課題として挙げる．

参考文献

[1] Gafarov, E. R., Lazarev, A. A., & Werner, F. (2011). Single machine scheduling problems with nancial resource constraints: Some complexity results and properties. *Mathematical Social Sciences*, 62(1), 7–13.

[2] Graham, R. L., Lawler, E. L., Lenstra, J. K., & Kan, A. R. (1979). Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey. *Annals of discrete mathematics*, 5, 287–326.

[3] Györgyi, P. & Kis, T. (2020). New complexity and approximability results for minimizing the total weighted completion time on a single machine subject to non-renewable resource constraints. *arXiv*, Available: http://arxiv.org/abs/1608.02792.