区間ゲームにおけるシャープレイ写像とその公理化について

05001332　早稲田大学　篠潤之介　SHINO Junnosuke
東都数学教育研究社　石原慎一　ISHIHARA Shin-ichi
ウォーリック大学　山内森平　YAMAUCHI Shimpei

1.　はじめに

本稿では, 提携値に不確実性が伴う協力ゲームを分析する. 協力ゲームの対象となる現実の経済社会において, 以下のように提携値に不確実性が伴う場合は少なくない.

- プレイヤーが一定の資金を出し合ってプロジェクトを実行する際, 実行するまでのコストや実行したあとのリターンが不確実である.
- 破産問題において, 債権者は返済時の債務者の支払い能力についての不確実性に直面しながら, 債権額を決定する.

したがって, 協力ゲームに不確実性を導入することは重要な拡張であると考えられる. 本稿では, そうした定式化の 1 つとして, **区間ゲーム**を取り上げる ([1] [2]). そして, 区間ゲームに適用する解概念とし**解写像**および**シャープレイ写像**を定義し, シャープレイ写像が効率性, 対称性, ナルプレイヤー条件, 加法性の 4 つの公理を満たす唯一の解写像であることを示す.

2.　区間ゲーム

特性関数形ゲーム (N, v) 同様, 区間ゲームはプレイヤー集合と特性関数の組 (N, w) によって与えられる. ただし, 特性関数 w は, 各提携 $S \in 2^N$ に**提携値 (集合)** として (実数値ではなく) 有界閉区間 $w(S)$ を与える関数である ($I(\mathbb{R})$ を有界閉区間全体の集合とすると, $w: 2^N \to I(\mathbb{R})$, ただし $w(\phi) = [0,0]$). $w(S)$ の上限と下限を $\overline{w}(S)$ および $\underline{w}(S)$ とする. IG を区間ゲーム全体の集合とし, 区間ゲーム (N, w) を単に w で表記する. また, 提携 $\{1, ..., k\} \in 2^N$ の提携値 (集合) $w(\{1, ..., k\})$ を $w(1, ..., k)$ と表記する.

異なる 2 つの n 人区間ゲーム $w', w'' \in IG$ に対して, $w' + w'' \in IG$ は, 各 $S \in 2^N$ の提携値を $(w' + w'')(S) = w'(S) + w''(S)$ とすることで定義される.

$w \in IG$ において, $S \subset N \setminus \{i, j\}$ である任意の S について $w(S \cup \{i\}) = w(S \cup \{j\})$ が成り立つとき, プレイヤー i と j は**対称**であるという. また, 任意の $S \in 2^{N \setminus \{i\}}$ について $w(S) = w(S \cup \{i\})$ が成り立つとき, i を**ナルプレイヤー**と呼ぶ.

3.　解写像とシャープレイ写像

区間ゲームが想定するのは以下の状況である:

- プレイヤーは提携値に関する事前の不確実性に直面しながら,
- 事後的に不確実性が除去され, 全体提携値の 1 つが実現した際に, それをプレイヤー間でどう配分するかを示す「ルール」について前もって合意形成を図る.

こうした「ルール」は, **ある区間ゲームにおける全体提携の各実現値に対して** n **次元実数値ベクトルを与える写像 (以下解写像と呼ぶ)** として定式化することが適切である [1]. 解写像の正確な定義は以下の通りである. 閉区間 $[a, b]$ に含まれる各実数値に対して n 次元実数値ベクトルを与える関数 $\kappa: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ を考え, κ 全体の集合を $K(\mathbb{R}^n)$ とする. 各 $w \in IG$ に対し, 写像 $F(w) \in K(\mathbb{R}^n)$ を与える写像を $F: IG \to K(\mathbb{R}^n)$ とする. 写像 $F(w)$ の定義域が $w(N)$ であるとき ($F(w): [\underline{w}(N), \overline{w}(N)] \to \mathbb{R}^n$), F を区間ゲームにおける**解写像**と呼ぶ.

以下では, 解写像の具体的な表現として**シャープレイ写像**を定義する. まず, 全体提携値の実現値 $t \in w(N)$ に対し, $t = (1-\alpha)\underline{w}(N) + \alpha\overline{w}(N)$ を満たす $\alpha \in [0, 1]$ が一意に定まる [2]. 次に, この α を用いて, 特性関数形ゲーム (N, v_w^α) を以下で定義する:

$$v_w^\alpha(S) = (1-\alpha)\underline{w}(S) + \alpha\overline{w}(S) \quad \forall S \in 2^N.$$

[1] 一方, 区間ゲームの既存の解概念 (区間解概念) は, 「ある区間ゲームに対して各要素を閉区間とする n 次元ベクトルを与える写像」として定義されている ([3] [4]).

[2] 厳密には, $w(N)$ が一点集合で, かつ少なくとも 1 つの $S \in 2^N \setminus N$ について $w(S)$ が一点集合でない場合, α は一意には定まらない. もっとも, これは全体提携値に不確実性が存在しない場合であり, このケースは除外して分析を進める.

特性関数形ゲーム (N, v_w^α) におけるシャープレイ値を $\phi(v_w^\alpha) = (\phi_1(v_w^\alpha), ..., \phi_n(v_w^\alpha))$ とすると，**シャープレイ写像** $\sigma^*(w) : [\underline{w}(N), \overline{w}(N)] \to \mathbb{R}^n$ は以下で定義される:

$$\sigma^*(w)(t) = \phi(v_w^\alpha).$$

4.　シャープレイ写像の公理化

区間ゲームにおける解写像 σ に対し，以下の公理系を考える．

- Axiom 1-1: 効率性 (**EF**)

$$\Big(\sum_{i\in N} \sigma_i(w)(t) = t\Big) \Big(\forall w \in IG\Big) \Big(\forall t \in w(N)\Big).$$

- Axiom 2-1: 対称性 (**SYM**)
  $w \in IG$ において i と j が対称であれば,

$$\Big(\sigma_i(w)(t) = \sigma_j(w)(t)\Big) \Big(\forall t \in w(N)\Big).$$

- Axiom 3-1: ナルプレイヤー条件 (**NP**)
  $w \in IG$ において i がナルプレイヤーであれば,

$$\Big(\sigma_i(w)(t) = 0\Big) \Big(\forall t \in w(N)\Big).$$

- Axiom 4-1: 加法性-1 (**AD1**)

$$\Big(\sigma_i(w'+w'')(t'+t'') = \sigma_i(w')(t')+\sigma_i(w'')(t'')\Big)$$
$$\Big(\forall w', w'' \in IG\Big) \Big(\forall t' \in w'(N)\Big) \Big(\forall t'' \in w''(N)\Big)$$
$$\Big(\forall i \in N\Big).$$

- Axiom 4-2: 加法性-2 (**AD2**)
  定数 $\alpha \in [0,1]$ と $w', w'' \in IG$ に対し，$t' \in w'(N)$ および $t'' \in w''(N)$ を,

$$\begin{aligned} t' &= (1-\alpha)\underline{w'}(N) + \alpha\overline{w'}(N) \\ t'' &= (1-\alpha)\underline{w''}(N) + \alpha\overline{w''}(N). \end{aligned}$$

  と定義すると,

$$\Big(\sigma_i(w'+w'')(t'+t'') = \sigma_i(w')(t')+\sigma_i(w'')(t'')\Big)$$
$$\Big(\forall w', w'' \in IG\Big) \Big(\forall \alpha \in [0,1]\Big) \Big(\forall i \in N\Big).$$

以上の公理系 (特に **AD1**) と解写像の関係については, 以下が成り立つ.

定理 4.1 ***EF, SYM, NP*** および ***AD1*** を同時に満たす解写像は存在しない．

定理 4.1 より, 加法性公理として **AD2** を考えると, 以下が成り立つ.

定理 4.2 シャープレイ写像 σ^* は，***EF, SYM, NP*** および ***AD2*** を満たす唯一の解写像である [3].

5.　おわりに

本稿では, 区間ゲームにシャープレイ写像を適用し, シャープレイ写像が, 一般的な公理系を満たす唯一の解写像であることを示した.

今後の課題として, 本稿では, シャープレイ値の区間ゲームへの適用を示したが, 同様にバンザフ指数やコア, 安定集合などを解写像として適用し, これらの解同士の関係を分析することが有用となる. また, 不確実性を伴う破産問題や費用分担問題など, 区間ゲームおよび解写像を用いた分析の適用範囲は広いと考えられる.

参考文献

[1] S. Z. Alparslan Gök, S. Micuel, and S. Tijs. 2009. Cooperation under Interval Uncertainty. *Mathematical Methods of Operational Research* 69: 99–109.

[2] R. Branzei, D. Dimitrov and S. Tijs. 2003. Shapley-like Values for Interval Bankruptcy Games. *Economic Bulletin* 3: 1–8.

[3] W. Han, H. Sun and G. Xu. 2012. A New Approach of Cooperative Interval Games: The Interval Core and Shapley Value Revisited. *Operational Research Letters* 40: 462–468.

[4] S. Ishihara and J. Shino. 2020. A Solution Mapping and its Axiomatization in Two-Person Interval Games. *WIAS Discussion Paper Series* No.2019-005.

[3] 定理 4.2 は, (i) シャープレイ写像 σ^* は EF, SYM, NP および AD2 を満たす, (ii) EF, SYM, NP および AD2 を満たす解写像はシャープレイ写像 σ^* に限られる, の 2 つの補題を示すことで示される.