2次型輸送問題に基づくネットワーク中心性指標

01206492　東北大学　*鈴木 賢一　　SUZUKI Ken–ichi

1.　はじめに

ネットワーク分析において，端点や枝を中心性の指標によって特徴づけることが広く行われている．中心性による分析は，ネットワークのトポロジーからみた端点や枝の重要性を評価するものである．ネットワークの構造のどの側面に焦点をあてるかによって，中心性の指標は様々なバリエーションを持つ．その中で，本研究では媒介中心性に着目した．

媒介中心性は，ネットワーク上の任意の 2 端点を選んだとき，評価対象の端点がその２端点の最短経路上に位置する度合いを表す．これは，評価対象の端点がネットワーク内のコミュニケーションにどれほど関与しているかを示す指標である．具体的な定義は以下の通りである．

$$\mathrm{BC}_k = \sum_{\substack{i,j\in\mathcal{V}\\ i\neq j\neq k}} \frac{\sigma_{i,j}^k}{\sigma_{i,j}}$$

ただし，$\sigma_{i,j}$ は端点 i，j 間の最短路数であり，$\sigma_{i,j}^k$ はそのうち端点 k を通る経路の数である．

媒介中心性は，コミュニケーションの媒介という観点から端点の重要性を評価するという意味で重要な指標と位置づけられている一方，定義上，最短路のみを考慮するため似たような位置にある端点に対して指標の数値が大きく異なる場合がありえる．本研究では，媒介中心性と同様にコミュニケーションの仲介という性質を持ちつつ，最短路以外の経路も考慮に入れる指標を考案した．

2.　２次型輸送問題

最短路問題はネットワークに関する問題においてもっとも基本的なものの一つである．最短路問題は特殊な輸送問題とみなすこともできる．つまり，所与のネットワークのある端点から別の端点に 1 単位の荷を輸送するものとし，距離を「費用」とみなして輸送費用を最小化問題を解くことで最短路が得られる．この場合，輸送費用は輸送量の 1 次関数となるため線形計画問題として定式化される．

ここで，単位輸送量あたりの費用が定数ではなく，輸送量に比例する場合を考える．枝 ij 間の輸送量が x_{ij} 単位である場合，単位あたり輸送費用が $c_{ij}x_{ij}$ となる．結果として，輸送費用は輸送量 x_{ij} の 2 次関数で表される．これは，例えば交通量が増加して渋滞により時間がかかるようになるという状況に相当する．輸送費用が線形ではなく 2 次関数となる問題は，2 次型輸送問題 (quadratic transportation problem) 呼ばれ，線形な輸送問題の自然な拡張して古くから知られている．しかしながら，実際の 2 次型輸送問題の応用は極めて限られてきた．というのも，通常の線形な輸送問題が現実的な配送路を生成するのに対して，2 次型輸送問題では極めて多くの経路に分散して配送を行うことになるからである．

3.　２次型媒介中心性

多くの経路に分散して輸送を行う解を生成するという 2 次型輸送問題の性質を利用して，新たな中心性の指標を提案する．

端点の集合 $\mathcal{V}$ と枝の集合 $\mathcal{E}$，枝の重み (費用，距離)c_e $(e\in\mathcal{E})$ が与えられているものとする．ネットワーク上の端点から，ソース (s) とシンク (t) を選び，ソースに 1 単位の供給，シンクには 1 単位の需要を付与する．以下では，ネットワークが連結であること，枝 (i,j) と (j,i) の重みが等しいことを仮定する．2 次型輸送問題は以下のように定式化される．

$$\left|\begin{array}{l}\min\ \displaystyle\sum_{e\in\mathcal{E}} c_e x_e^2\\ \text{s.t.}\ Ax=b\end{array}\right. \qquad (1)$$

ここで，x_e は枝 e の輸送量，$x=(x_e)$ $(e\in\mathcal{E})$，A は接続行列，b は端点の需要量と供給量を表す．問題 (1) はラグランジュ法により解析的に解くことができ，その最適解は

$$x^* = Q^{-1}\tilde{A}^\top \tilde{A}Q^{-1}\tilde{A}^\top\tilde{b}$$

となる．ここで，Q は対角成分が c_e である対角行列，$\tilde{A}$ は A からひとつの行を取り除いた行列，$\tilde{b}$ もそれに対応して b から作られるベクトルである．

ソースを i，シンクを j とした場合の最適解を $x^{(i,j)}$ とおく．枝の 2 次型媒介中心性 x^{QBC} を次のように定義する．

$$x^{\mathrm{QBC}} \equiv \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{j \in \mathcal{V}, j \neq i} |x^{(i,j)}|$$

n は枝の数である．

$x^{(i,j)}$ に基づいて，各端点における流入量 $y_k^{(i,j)}$ $(k \in \mathcal{V})$ が得られる．$E(k)^{\mathrm{in}}$ を端点 k へ流入する量を持つ枝の集合とし，

$$y_k^{(i,j)} \equiv \begin{cases} \displaystyle\sum_{e \in E(k)^{\mathrm{in}}} |x_e^{(i,j)}|, & k \in \mathcal{E}/\{i,j\} \\ 0, & k \in \{i,j\} \end{cases}$$

とする．これより，端点の 2 次型媒介中心性 y^{QBC} を次のように定義する．

$$y^{\mathrm{QBC}} \equiv \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{j \in \mathcal{V}, j \neq i} y^{(i,j)}$$

枝と端点の 2 次型媒介中心性指標は，いずれも最小で 0，最大で 1 の値を取る．

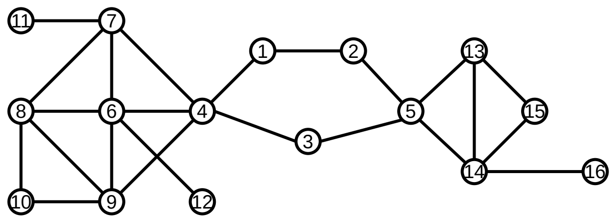

図 1: 端点数が 16，枝の本数が 23 本のネットワーク

4. 数値例による比較

図 1 のネットワークを用いて，2 次型媒介中心性（QBC）と代表的な中心性である，媒介中心性 (BC)，近接中心性（CC），固有ベクトル中心性 (EV)，情報中心性（IC）の値を求め比較を行った．各指標の値を表 1 に，指標間の相関係数を表 2 に示した．相関係数より，2 次型媒介中心性と媒介中心性，近接中心性，情報中心性は比較的類似した値の分布となっていることがわかる．特に，2 次型媒介中心性と媒介中心性は相関係数の値が大きいことから，両者は似た性質を持っていると言える．しかし，端点 1，2，3 の値を見ると，両者の違いを確認することができる．媒介中心性において，端点 3 に比べて端点 1，2 は明らかに低い値である．それに対して，2 次型媒介中心性では後者の端点も比較的大きな値を取っている．これより，2 次型媒介中心性は，最短路以外の「迂回路」に対しても相応の評価を与えていると言える．

k	QBC	BC	CC	EV	IC
1	**0.207**	**0.076**	0.395	0.128	0.395
2	**0.197**	**0.048**	0.366	0.054	0.366
3	**0.267**	**0.381**	0.441	0.132	0.441
4	0.544	0.549	0.484	0.416	0.484
5	0.437	0.429	0.405	0.07	0.405
6	0.26	0.168	0.405	0.475	0.405
7	0.227	0.162	0.395	0.381	0.395
8	0.148	0.035	0.326	0.406	0.326
9	0.179	0.124	0.385	0.413	0.385
10	0.037	0	0.3	0.223	0.3
11	0	0	0.288	0.104	0.288
12	0	0	0.294	0.129	0.294
13	0.131	0.057	0.319	0.034	0.319
14	0.207	0.19	0.326	0.036	0.326
15	0.042	0	0.254	0.019	0.254
16	0	0	0.25	0.01	0.25

表 1: 5 種類の中心性指標の値

	QBC	BC	CC	EV	IC
QBC	1	0.927	0.896	0.380	0.874
BC	0.853	1	0.835	0.268	0.739
CC	0.802	0.785	1	0.528	0.923
EV	0.300	0.296	0.498	1	0.696
IC	0.717	0.696	0.819	0.583	1

表 2: 中心性指標の相関 (右上が積率相関係数，左下が順位相関係数)

5. まとめ

媒介中心性においては最短路を用いるのに対して，2 次型媒介中心性では 2 次型輸送問題の最適解を用いる．両者の基本的なコンセプトは共通であるものの，2 次型輸送問題の性質により後者の指標は副次的な経路に対しても重要性を与える．2 つの指標の類似性および迂回路への評価の相違が数値例によって確認された．

参考文献

[1] Karen Stephenson and Marvin Zelen. Rethinking centrality: Methods and examples. *Social Networks*, 11(1):1 – 37, 1989.