日本オペレーションズ・リサーチ学会
2021年 春季研究発表会

確率変分不等式問題に対する分布的ロバスト期待残差最小化モデル

05000516　京都大学　*堀篤史　HORI Atsushi
05000141　京都大学　山川雄也　YAMAKAWA Yuya
01704634　京都大学　山下信雄　YAMASHITA Nobuo

1. はじめに

変分不等式問題（VIP）は経済学や交通工学など様々な実社会の問題を表現できる均衡モデルとして知られている．確率変分不等式問題（SVIP）は将来確定する事象の不確実性をあらかじめ考慮した上で意思決定を行う VIP の拡張モデルである．

本研究では $\xi \in \Re^m$ を確率変数とする以下の SVIP を考える．

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad x^* \in S \subseteq \Re^n \\ &\text{s.t.} \quad F(x^*,\xi)^\top (x - x^*) \geq 0,\ \forall x \in S \\ &\qquad\quad \text{almost surely } \xi \in \Xi \subseteq \Re^m \end{aligned} \tag{1}$$

ただし，$F\colon \Re^n \times \Xi \to \Re^n$ であり，S は閉凸集合とする．集合 $\Xi \subseteq \Re^m$ は確率測度 $\mathbb{P}(\cdot)$ の台とする．

我々の目標は確率分布 $\mathbb{P}(\cdot)$ が既知でない状況下で SVIP(1) の妥当な解 $x^* \in S$ を見つけることである．

VIP の均衡解の妥当性を測る関数として次の正則化ギャップ（RGAP）関数がある．

$$f_\alpha(x,\xi) \coloneqq \max_{z \in S} \left\{ \langle F(x,\xi), x - z \rangle - \frac{1}{2\alpha}\|z - x\|^2 \right\}$$

ただし，$\alpha > 0$ とし，ここでは ξ は固定しているものとする．RGAP 関数は集合 S 上でメリット関数の性質を満たす．すなわち，与えられた ξ に対して，$f_\alpha(x,\xi) \geq 0$ $(x \in S)$ であり，$f_\alpha(x,\xi) = 0$ かつ $x \in S$ であることと $x \in S$ が VIP の解であることは等価である．これらの性質から，$f_\alpha(x,\xi)$ の大きさによって，均衡解の妥当性を判断することができる．

先行研究 [2] では，SVIP(1) に対して RGAP 関数に期待値をとった期待残差関数 $\mathbb{E}[f_\alpha(x,\xi)]$ を与え，S 上で最小化することで SVIP を解くアプローチを提案した．しかし，この手法は確率分布が既知であることを前提としているほか，数値積分を用いた期待値の計算に手間がかかることが問題点としてあげられる．

本研究では確率分布に不確実性を考慮した確率最適化として近年注目されている分布的ロバスト最適化 [1]（DRO）の枠組みで先行研究 [2] の期待残差最小化を拡張し，分布不確実な SVIP(1) に対する頑健な解を構築できる手法を提案する．また，適当な仮定の下で確率変数を含まない決定的な最適化問題と等価になるため，従来手法のように数値積分を必要としない点で優れている．

本発表では，理論的成果を紹介し，数値実験により従来モデルとの比較を行い，計算速度，頑健性が十分に信頼のあるものとなっていることを確かめる．

2. 分布的ロバスト最適化

本研究では，確率分布が特定できない状況に対して分布の不確実性集合を与え，その中で最も悲観的な分布関数をとるときの期待残差最小化を行う分布的ロバスト期待残差最小化（DR-ERM）モデルを以下のように提案する．

$$\min_{x \in S} \quad \sup_{\mathbb{P} \in \mathscr{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f_\alpha(x,\xi)\right] \tag{2}$$

本発表では，分布不確実性集合 $\mathscr{P}$ は以下のようなモーメント集合として与えられているとする．

$$\begin{aligned} \mathscr{P} \coloneqq \{ \mathbb{P} \in \mathscr{M}^+ \mid \mathbb{P}\left(\xi \in \Xi\right) = 1, \\ \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\xi\right] - \mu_0\right)^\top \Sigma_0^{-1} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\xi\right] - \mu_0\right) \leq \gamma_1, \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(\xi - \mu_0\right)\left(\xi - \mu_0\right)^\top\right] \preceq \gamma_2 \Sigma_0 \} \end{aligned}$$

ただし，$\mathscr{M}^+$ は可測空間上の確率測度の集合を表し，$\mu_0 \in \Re^m$ と $\Sigma_0 \in \Re^{m \times m}$ はそれぞれ標本の観測値から得た平均と分散共分散とする．定数 $\gamma_1 \geq 0$，$\gamma_2 \geq 1$ はそれぞれ平均 μ_0 と分散共分散 Σ_0 に対する確信度（confidence parameter）を表し，これらの値が小さいほど，標本から得た μ_0 と Σ_0 に自信がある（真の値に近い）と想定する．

3. 等価な非線形半正定値計画問題への変換とその凸性

ここでは，SVIP(1) の写像 F は線形とし，集合 S は以下の閉凸多面体であるとする．

$$\begin{aligned} F(x,\xi) &\coloneqq M(\xi)x + q(\xi) \\ S &\coloneqq \{x \in \Re^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \end{aligned}$$

また, x の係数行列 $M(\xi) \in \Re^{n\times n}$, ベクトル $q(\xi) \in \Re^n$ はそれぞれ, ξ に関して線形であるとする．また, 行列 $M(\xi)$ の i, j 成分 $(M(\xi))_{ij}$ $(i, j = 1, ..., n)$ は係数ベクトル $m^{ij} \in \Re^m$ と定数 $m_0^{ij} \in \Re$ を用いて

$$(M(\xi))_{ij} \coloneqq (m^{ij})^\top \xi + m_0^{ij}$$

と表し，ベクトル $q(\xi)$ の第 i 成分 $(q(\xi))_i$ $(i = 1, ..., n)$ は同様に

$$(q(\xi))_i \coloneqq (q^i)^\top \xi + q_0^i$$

と表すことにする．さらに，写像 F の第 i 成分 $F_i(x, \xi)$ $(i = 1, ..., n)$ を ξ について書き表した形を以下のように定義する．

$$F_i(x, \xi) = (c^i(x))^\top \xi + c_0^i(x)$$

ただし，$c^i(x), c_0^i(x)$ は以下である．

$$c^i(x) \coloneqq q^i + \textstyle\sum_{j=1}^n x_j m^{ij} \in \Re^m$$
$$c_0^i(x) \coloneqq q_0^i + \textstyle\sum_{j=1}^n x_j m_0^{ij} \in \Re$$

写像 F と集合 S が上述のように与えられているとき，文献 [1, Lemma 1] と RGAP 関数の内部最大化に関して Lagrange 双対性を利用することで，以下の定理が示すように確率変数を含まない決定的な非線形半正定値計画問題（NSDP）と等価になる．

定理 1. $\Sigma_0 \succ 0$ かつ $\Xi = \Re^m$ とする．このとき，DR-ERM(2) は以下の最適化問題と等価である．

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{\substack{x,\lambda,\mu,\\ y_0,z_0,y,Y}} & z_0 + y_0 + \mu_0^\top y + \left\langle \gamma_2\Sigma_0 + \mu_0\mu_0^\top, Y \right\rangle \\ \text{s.t.} & z_0 \geq \sqrt{\gamma_1}\left\| \Sigma_0^{1/2}(y + 2Y\mu_0) \right\| \\ & \mathcal{D}_\alpha(x, \lambda, \mu, y_0, y, Y) \succeq O \\ & x \in S,\ \lambda \in \Re^l,\ \mu \in \Re^n_+ \\ & y_0, z_0 \in \Re, y \in \Re^m, Y \in \mathbb{S}^m \end{array} \tag{3}$$

ただし，$\mathbb{S}^m$ は m 次対称行列の集合とし，

$$\mathcal{D}_\alpha(x, \lambda, \mu, y_0, y, Y) \coloneqq$$
$$\begin{bmatrix} y_0 & 1/2y^\top \\ 1/2y & Y \end{bmatrix} - \left\{ G(x, \lambda, \mu) + \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^n H^i(x, \lambda, \mu) \right\}$$
$$G(x, \lambda, \mu) \coloneqq \begin{bmatrix} \left\langle A^\top\lambda + \mu, x \right\rangle - \langle b, \lambda\rangle & 0^\top \\ 0 & O_{m\times m} \end{bmatrix}$$
$$H^i(x, \lambda, \mu) \coloneqq \begin{bmatrix} p_0^i(x, \lambda, \mu)^2 & -p_0^i(x, \lambda, \mu)c^i(x)^\top \\ -p_0^i(x, \lambda, \mu)c^i(x) & c^i(x)c^i(x)^\top \end{bmatrix}$$
$$p_0^i(x, \lambda, \mu) \coloneqq \sum_{j=1}^l a^{ji}\lambda_j + \mu_i - c_0^i(x)$$

とする． □

ここで, 新たに出現した決定変数 λ, μ はそれぞれ RGAP 関数 f_α の内部の最適化問題に対して双対性を考えたときに現れる S の制約条件 $Ax = b, x \geq 0$ に対する Lagrange 乗数に対応する．

次に，NSDP(3) の凸性に関する結果を述べる．

定理 2. 行列 $M(\xi)$ は一様正定値であると仮定する．つまり，ある正数 β_0 が存在し，

$$\inf_{\xi\in\Xi, \|v\|=1} v^\top M(\xi)v \geq \beta_0$$

を満たすとする．このとき，$\alpha \geq 1/(2\beta_0)$ ならば，NSDP(3) は凸最適化問題となる． □

次に紹介する行列は一様正定値行列となる．

- 行列 $M(\xi)$ が確率変数 ξ に関して依存しない，すなわち $m^{ij} = 0$ $(i, j = 1, ..., m)$ で定義された定数行列が正定値であるとき．
- 行列 $M(\xi)$ を
$$M(\xi) \coloneqq \begin{bmatrix} M_1 & B(\xi) \\ -B(\xi)^\top & M_2 \end{bmatrix}$$
と定義する．ただし，$M_1 \in \Re^{n_1\times n_1}, M_2 \in \Re^{n_2\times n_2}$ は正定値とし，任意の ξ に対して $B(\xi) \in \Re^{n_1\times n_2}$ とするとき．

4. まとめ

本発表では以下のことを述べた．

- 確率分布に不確実性を持つ SVIP に対して分布的にロバストな期待残差最小化モデルを提案した．
- 写像 F，集合 S に仮定を設けることで，不確実性パラメータ（確率変数）を含まない決定的な最適化問題に等価変換できることを示した．
- さらに，行列 $M(\xi)$ に対する一様正定値性を仮定することで最終的に凸最適化問題となる条件を示した．

数値実験結果に関しては当日報告する．

参考文献

[1] E. Delage and Y. Ye. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. *Operations Research*, 58(3):595–612, 2010.

[2] M. J. Luo and G. H. Lin. Expected residual minimization method for stochastic variational inequality problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 140(1):103–116, 2009.