日本オペレーションズ・リサーチ学会
2021年 春季研究発表会

穏当なエラーバウンドと収束解析

05001310　理研 AIP センター　*リュウ　ティエンシャン　LIU Tianxiang
05000745　統計数理研究所　ロウレンソ ブルノ フィゲラ　LOURENÇO Bruno Figueira

1.　はじめに

本発表では [4] の概要を述べる．以下の凸実行可能性問題を取り扱う．

$$\text{find} \quad x \in C := \cap_{i=1}^m C_i. \qquad \text{(CFP)}$$

ここで，C_i は有限次元空間 $\mathcal{E}$ に含まれている閉凸集合を表す．また，C は非空集合とする．$\mathcal{E}$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ という内積を付いていると仮定する．それによって，$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ というノルムを定義する．$x \in \mathcal{E}$ と集合 $S \subseteq \mathcal{E}$ の**距離**を以下のように定義する．

$$\text{dist}\,(x, S) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in S\}.$$

問題 (CFP) を解くアルゴリズムの中で，常に収束するアルゴリズムが多い．しかし，多くの場合，収束率を得るために，エラーバウンドのような条件を仮定する必要がある．例えば，以下のエラーバウンドがよく知らている．

定義 1 (Hölderian エラーバウンド)**.** 閉凸集合 $C_1, \ldots, C_m \subseteq \mathcal{E}$ に対して，以下の条件を満たせば，「**Hölderian エラーバウンドが成立つ**」という．すべての有界集合 $B \subseteq \mathcal{E}$ に対して，ある $\theta_B > 0$ と $\gamma_B \in (0, 1]$ に対して，

$$\text{dist}\,(x, C) \le \theta_B \max_{1 \le i \le m} \text{dist}\,(x, C_i)^{\gamma_B} \quad \forall\, x \in B$$

が成り立つ．特に，$\gamma_B \equiv 1$ ならば，**Lipschitz エラーバウンド**と呼ばれる．

Hölderian (あるいは Lipschitz) エラーバウンドが成り立てば，多くのアルゴリズムの収束率は劣線形 (線形) である [2, 3]．一方，Hölderian エラーバウンドを満たしていない問題が存在し（例：[1, 5]），より一般的なエラーバウンドの下での収束解析は少ない．

本研究では**穏当なエラーバウンド**という新たなエラーバウンドクラスを導入し，(CFP) を解くアルゴリズムの収束率を解析する．

2.　穏当なエラーバウンド関数

定義 2 (穏当なエラーバウンド関数)**.** 以下の条件を満たす関数 $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を閉凸集合 $C_1, \ldots, C_m \subseteq \mathcal{E}$ に対する「**穏当なエラーバウンド関数**」という．

(i) すべての $x \in \mathcal{E}$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$\text{dist}\,(x, C) \le \Phi\big(\max_{1 \le i \le m} \text{dist}\,(x, C_i),\, \|x\|\big). \qquad \text{(CEB)}$$

(ii) 任意の $b \in \mathbb{R}_+$ に対して，関数 $\Phi(\cdot, b)$ は単調非減少で，0 において右連続で，かつ $\Phi(0, b) = 0$ が成り立つ．

(iii) 任意の $a \in \mathbb{R}_+$ に対して，関数 $\Phi(a, \cdot)$ は単調非減少する．

特に，すべての $b > 0$ に対して，$\Phi(\cdot, b)$ は狭義単調増加ならば，Φ は「**狭義**穏当なエラーバウンド関数」と呼ばれる．また，(CEB) は「**穏当なエラーバウンド**」と呼ばれる．$\Phi(\cdot, b)$ が狭義単調増加のとき，(CEB) は「**狭義穏当なエラーバウンド**」と呼ばれる．

要するに，任意の x に対して，Φ を用いると，x と C の距離の上界を得られる．その上界は x のノルムとそれぞれの C_i と x の距離に依存する上界である．

穏当なエラーバウンドの存在性および Hölderian エラーバウンドとの関係を以下に述べる．

命題 1 ([4] の Proposition 3.2 と Theorem 3.4)**.**

(a) 任意の閉凸集合 $C_1, \ldots, C_m \subseteq \mathcal{E}$ に対して，C が非空集合のとき，穏当なエラーバウンド関数が常に存在する．

(b) 閉凸集合 $C_1, \ldots, C_m \subseteq \mathcal{E}$ に対して，以下の条件は Hölderian エラーバウンドが成り立つことの必要十分条件である．ある単調非減少関数 $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_{++}$ と単調非増加関数 $\gamma : \mathbb{R}_+ \to (0, 1]$ に対して，次の Φ は狭義穏当なエラーバウンド関数である．

$$\Phi(a, b) := \rho(b) \max\big(a^{\gamma(b)},\, a\big).$$

3.　収束率解析

収束率解析のため，まず，以下の仮定を満たす点列の解析を行う．

仮定 1. 点列 $\{x^k\} \subseteq \mathcal{E}$ とする．

- **Fejér 単調性条件**．任意の $c \in C$ とすべての k に対して，以下の不等式が成り立つ．

$$\|x^{k+1} - c\| \le \|x^k - c\|.$$

- **十分な減少条件**. ある正の整数 ℓ と $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ を満たす非負数列 $\{a_k\}$ に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$\mathrm{dist}^2(x^k, C) \geq \mathrm{dist}^2(x^{k+\ell}, C) + a_k \max_{1\leq i\leq m} \mathrm{dist}^2(x^k, C_i).$$

仮定 1を満たす点列を生成するアルゴリズムが多い. 例えば, 次の射影アルゴリズムを考える: $\{\alpha_i^k\} \subseteq [0, 2)$ とし, 非負数列 $\{\lambda_i^k\}$ は $\sum_{i=1}^m \lambda_i^k = 1$ を満たし, $\{x^k\}$ は以下の更新式で生成される.

$$x^{k+1} = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k [(1-\alpha_i^k)I + \alpha_i^k P_{C_i}](x^k). \qquad \text{(PA)}$$

ここで, I は単位演算子であり, P_{C_i} は集合 C_i に対する直行射影演算子である.

命題 2 ([4] の Lemma 4.11)**.** $\{x^k\}$ は (PA) に生成された点列とする. $\{x^k\}$ が以下の条件のいずれかを満たせば, 仮定 1が満たされている.

(a) ある $m(k) \in \{i \mid i \in \mathrm{Arg\,max}_{1\leq i\leq m} \mathrm{dist}(x^k, C_i)\}$ は $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{m(k)}^k \lambda_{m(k)}^k \left(2 - \sum_{i=1}^k \alpha_i^k \lambda_i^k\right) = \infty$ を満たす.

(b) $I_\sigma(k) := \{i \mid \lambda_i^k \geq \sigma\}$ とする. すべての i と k に対して $\alpha_i^k = 1$ とし, ある $\sigma \in (0, 1]$ と整数 $s \geq 1$ に対して以下の条件が成り立つ.

$$I_\sigma(k) \cup I_\sigma(k+1) \cup \cdots \cup I_\sigma(k+s-1) = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

特に, mean projection algorithm (MPA), cylic projection algorithm (CPA) および maximum distance projection algorithm (MDPA) に生成された点列は仮定 1を満たす.

次は, 仮定 1を満たす点列の収束解析のため, 狭義穏当なエラーバウンド関数に基づいて, 以下の補助関数を構築する.

補助関数. 狭義穏当なエラーバウンド関数 Φ と $\kappa > 0$ に対して, 関数 $\phi_{\kappa,\Phi}(t) := \Phi^2(\sqrt{t}, \kappa)$ $(t \geq 0)$ を定義し, 以下の補助関数を定義する.

$$\Phi_\kappa^{\spadesuit}(t) := \int_\delta^t \frac{1}{\phi_{\kappa,\Phi}^-(s)} ds, \quad t \in (0, \sup \phi_{\kappa,\Phi}). \qquad \text{(PF)}$$

ただし, $\delta \in (0, \sup \phi_{\kappa,\Phi})$ とする. また, $\phi_{\kappa,\Phi}^-$ は以下の関数 $\phi_{\kappa,\Phi}$ の一般逆写像である.

$$\phi_{\kappa,\Phi}^-(s) := \inf\{t \geq 0 \mid \phi_{\kappa,\Phi}(t) \geq s\},\ 0 \leq s < \sup \phi_{\kappa,\Phi}.$$

$\Phi_\kappa^{\spadesuit}$ は以下の性質を持つ.

命題 3 ([4] の Proposition 4.3 と Proposition 4.4)**.**

(a) 補助関数 $\Phi_\kappa^{\spadesuit}$ は $(0, \sup \phi_{\kappa,\Phi})$ において凹関数であり, 狭義単調増加し, かつ連続的微分可能である.

(b) $\kappa \geq \max\{\mathrm{dist}(0, C), \|x^0\|\}$, $C \neq \mathcal{E}$ および $x^0 \notin C$ を満たせば, $t \to 0$ の場合, $\Phi_\kappa^{\spadesuit}(t) \to -\infty$ が成り立つ.

狭義穏当なエラーバウンドの下で, 上記の補助関数を利用して, 仮定 1を満たす点列の収束率が得られる.

定理 1 ([4] の Theorem 4.7)**.** $\{x^k\}$ は仮定 1を満たす点列とする. Φ は閉凸集合 $C_1, \ldots, C_m \subseteq \mathcal{E}$ に対する狭義穏当なエラーバウンド関数とし, $\kappa \geq \|x^0\| + 2\,\mathrm{dist}(0, C)$ とし, $\Phi_\kappa^{\spadesuit}$ は (PF) ように定義される. すべての $k \geq 2\ell$ に対して, 点列 $\{x^k\}$ は有限収束するもしくは以下の不等式が成り立つ.

$$\mathrm{dist}(x^k, C) \leq \sqrt{\left(\Phi_\kappa^{\spadesuit}\right)^{-1}\left(\Phi_\kappa^{\spadesuit}(\mathrm{dist}^2(x^0, C)) - \sum_{i=0}^{b_k-1} a_{k_0+i\ell}\right)}.$$

ここで, $k_0 \in [0, \ell-1]$ は任意の整数である. また, $b_k := \frac{k-\ell-(k \bmod \ell)}{\ell}$.

上記の定理は様々なアルゴリズムの収束率とエラーバウンド関数を繋げる. 特に, $m = 2$ のとき, C_1 が対称錐かつ C_2 がアフィン空間ならば, 様々なアルゴリズムの収束率と (CFP) の *singularity degree* という不変量を繋げる.

参考文献

[1] B. F. Lourenço. Amenable cones: error bounds without constraint qualifications. *To appear in Mathematical Programming*, 2017.

[2] J. M. Borwein, G. Li and M. K. Tam. Convergence rate analysis for averaged fixed point iterations in common fixed point problems. *SIAM Journal on Optimization*, 27, 1–33, 2017.

[3] A. Beck and M. Teboulle. Convergence rate analysis and error bounds for projection algorithms in convex feasibility problems. *Optimization Methods and Software*, 18, 377–394, 2003.

[4] T. Liu and B. F. Lourenço. Convergence analysis under consistent error bounds. *arXiv preprint arXiv:2008.12968*, 2020.

[5] S. B. Lindstrom, B. F. Lourenço, T. K. Pong. Error bounds, facial residual functions and applications to the exponential cone. *arXiv preprint arXiv:2010.16391*, 2020.