日本オペレーションズ・リサーチ学会
2021年 春季研究発表会

サークルグラフの頂点彩色

05001187　東京工業大学　*田中雅人　TANAKA Masato
01605000　東京工業大学　松井知己　MATSUI Tomomi

1. はじめに

サークルグラフとは，対応する弦が交差する時，かつその時に限り頂点が隣接するように，頂点を円の弦に対応させることのできるグラフのことを指す．グラフの頂点彩色問題とは，隣接する頂点に異なる色を割り当てるために必要な最小の色数及びその塗り方を求める問題である．頂点彩色問題は古くから研究されており，サークルグラフに限っても頂点彩色問題はNP完全である [3] ことが知られている．サークルグラフの彩色問題は様々な応用例を持ち，例えばAvrielら [1] はコンテナ船積荷問題がサークルグラフの頂点彩色問題として表されることを述べている． サークルグラフの彩色問題の解法としては，例えばČerný [2] やWang [4] において近似解法や発見的解法が提案されている．本論文ではサークルグラフの彩色問題に対して，新しい定式化を提案する．

2. 準備

以下では与えられたサークルグラフを $G = (V, E)$ とする．本稿では G に対応する円と弦は与えられているものとし，これをサークル図と呼ぶ．また，弦は端点を共有しないものとする．グラフ G に対応するサークル図において，弦は $|V|$ 本，弦の端点は $2|V|$ 個存在する．円周上で弦の端点以外の点を一つ選び，原点と呼ぶ．原点を 0 とし，原点から時計回りに弦の端点を $1, 2, ..., 2|V|$ とナンバリングする．頂点 $i \in V$ に対応する弦 i' の端点が $x_{i'}, y_{i'}$ とナンバリングされているとする．このとき $x_{i'}, y_{i'}$ の内で (ナンバリングが) 小さい方を l_i，大きい方を r_i と書く．頂点 $i \in V$ に対し区間 $I(i)$ を $I(i) := [l_i, r_i]$ と定義する．定義より明らかに $I(i) \cap I(j) = \emptyset$ であるとき，弦 i' と弦 j' は交差せず，頂点 i, j 間にグラフ G の枝は存在しない．このとき頂点 i と j は**離れている**と言う．性質 $I(i) \subset I(j)$ もしくは $I(i) \supset I(j)$ が成立する際も弦 i' と弦 j' は交差しないため，頂点 i, j 間にグラフ G の枝は存在しない．このとき頂点 j は頂点 i を**含んでいる**，または頂点 i は頂点 j を**含んでいる**と言う．それ以外の時，つまり $I(i) \cap I(j) \neq \emptyset$ かつ $[I(i) \not\subset I(j)$ もしくは $I(i) \not\supset I(j)]$ のとき，弦 i' と弦 j' は交差しているため，頂点 i, j はグラフ G において隣接している．

次に，G の頂点間に半順序関係 $\dot{\leq}$ を導入する．頂点対 $v, v' \in V$ に対して，$v = v'$ もしくは $r_v \leq l_{v'}$ が成り立つとき，かつその時のみ $v \dot{\leq} v'$ と定義する．容易に分かるように $(V, \dot{\leq})$ は半順序集合となる．頂点部分集合 $V' \subseteq V$ において，V' 中のどの2要素も半順序関係 $\dot{\leq}$ で比較可能であるとき，V' は**鎖**であるという．逆に頂点部分集合 $V' \subseteq V$ に対し，V' 中のどの2要素も半順序関係 $\dot{\leq}$ で比較不能であるとき，V' は**反鎖**であるという．

3. 定式化

与えられたサークルグラフ $G = (V, E)$ に対し，定式化に用いる有向グラフ Γ を導入する．有向グラフ Γ の頂点集合は**根**と呼ばれる人工的な頂点を 0 とし，$V \cup \{0\}$ と定義する．有向グラフ Γ の有向枝集合 A を

$$A = \{(0, i) \mid i \in V\} \cup \{(i, j) \mid I(i) \supset I(j)\}.$$

と定義する．定義より明らかに，$\Gamma = (V \cup \{0\}, A)$ は非巡回有向グラフである．

枝の部分集合 $T \subseteq A$ が $|T| = |V|$ であり，かつ (根以外の) どの頂点 $i \in V$ も T 中に入枝をちょうど1つ持つとき T を**有向全域木**と呼ぶ．与えられた有向全域木 T が枝 (i, j) を持つとき，T に関して j を i の**子**であり，i を j の**親**であると言う．T における i の子の集合を $\mathrm{Ch}(T, i)$ と書く．以下では Γ 上の有向全域木を用いて彩色を表現する．グラフ G の c 彩色 $\phi : V \to \{1, 2, \ldots, c\}$ が与えられたとする．各頂点 $j \in V$ に対し，$\{i \in V \mid \phi(i) = \phi(j), I(i) \supset I(j)\} = \emptyset$ ならば $\mathrm{Prt}(j) = 0$ と定義する．そうでなければ，$\{I(i) \mid i \in V, \phi(i) = \phi(j), I(i) \supset I(j)\}$ に含まれる区間の内，(唯一に定まる) 最小の区間に対する V の頂点を $\mathrm{Prt}(j)$ と書く．

グラフ G の任意の彩色 ϕ に対して，有向全域木 $\{(\mathrm{Prt}(j), j) \in A \mid j \in V\}$ を $T(\phi)$ で表す．

補題 3.1. 有向グラフ Γ の有向全域木 T において，$T = T(\phi)$ を満たす c-彩色 ϕ が存在する必要十分条件は，下記の *2* 条件

C1: 各頂点 $i \in V$ に対し，$\mathrm{Ch}(T, i)$ は $(V, \dot{\leq})$ の鎖である，

C2: 頂点部分集合 $\mathrm{Ch}(T, 0)$ 中の任意の反鎖のサイズは c 以下，

両方が成り立つことである．

区間の端点の集合 $\bigcup_{i \in V}\{l_i, r_i\}$ を P とする．

補題 3.2. 任意の頂点部分集合 $\widehat{V} \subseteq V$ に対し，$\max\{|V'| \mid V' \subseteq \widehat{V}, V' は\ (V, \dot{\leq})\ の反鎖\} = \max_{p \in P} |\{i \in \widehat{V} \mid p \in I(i)\}|$ が成り立つ．

任意の頂点 $i \in V \cup \{0\}$ に対して，$V^{[i]}$ を $V^{[i]} = \{j \in V \mid (i, j) \in A\}$ と定義する．また，$V^{\bullet} = \{i \in V \mid V^{[i]} \neq \emptyset\}$ と定義する．ここで $V^{[0]} = V$ 及び $0 \notin V^{\bullet}$ であることに注意されたい．有向グラフ Γ 中の各有向枝 $(i, j) \in A$ に対し 0-1 変数 x^i_j を導入し，変数ベクトルを $\boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^A$ と表記する．任意の頂点 $i \in V^{\bullet} \cup \{0\}$ に対し，Γ 上で i から出ている枝集合でインデックスされた $\boldsymbol{x}$ の部分ベクトルを $\boldsymbol{x}^{[i]}$ と表す．行列 $M = (m_{pi})$ を

$$m_{pi} = \begin{cases} 1 & (\text{if } p \in I(i)), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

で定義される，$P \times V$ でインデックスされた 0-1 行列とする．任意の頂点 $i \in V^{\bullet}$ に対して，$I(j) \subset I(i)$ を満たす頂点 j に対応する M の列ベクトルからなる行列を $M^{[i]}$ と書く．

以上の記号と変数を用いると，サークルグラフ G の彩色問題の定式化

$$\begin{aligned} \mathrm{CG}: \min.\ & c \\ \text{s.t. } & M\boldsymbol{x}^{[0]} \leq\ c\boldsymbol{1}, \\ & M^{[i]}\boldsymbol{x}^{[i]} \leq \boldsymbol{1} \qquad (\forall i \in V^{\bullet}), \\ & \sum_{i:(i,j) \in A} x^i_j = 1\ (\forall j \in V), \\ & x^i_j \in \{0, 1\} \qquad (\forall (i, j) \in A), \\ & c \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

が得られる．すなわち，以下が成り立つ．

定理 3.3. 組 $(\boldsymbol{x}, c) \in \{0, 1\}^A \times \mathbb{Z}_+$ が問題 *CG* の実行可能解である必要十分条件は，有向枝集合 $T = \{(i, j) \in A \mid x^i_j = 1\}$ が有向グラフ Γ の有向全域木であり，T と c が定理 *3.1* の条件 *C1,C2* を満たすことである．

4.　分数彩色数

与えられたサークルグラフ G の独立集合の接続行列を F で表す．すなわち，F の行は V によってインデックスされ, F の列は G の独立集合によってインデックスされており, 各列ベクトルは対応する独立集合の特性ベクトルである．分数彩色問題は G のすべての独立集合でインデックスされた変数ベクトル q を用いて

$$\min\{\boldsymbol{1}^{\top}\boldsymbol{q} \mid F\boldsymbol{q} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}\}$$

と定義され，この最適値を分数彩色数と呼ぶ．

定理 4.1. *CG* の $x^i_j \in \{0, 1\}$ と $c \in \mathbb{Z}_+$ を $x^i_j \geq 0$ と $c \geq 0$ で置き換えて得られる線形緩和問題の最適値は分数彩色数に等しい．

参考文献

[1] M. Avriel, M. Penn, N. Shpirer, “Container ship stowage problem: complexity and connection to the coloring of circle graphs,” *Discrete Applied Mathematics*, **103** (2000), 271–279.

[2] J. Černý , “Coloring circle graphs,” *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **29** (2007), 457–461.

[3] M. R. Garey, D. S. Johnson, G. L. Miller, C. Papadimitriou, “The complexity of coloring circular arcs and chords,” *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, **1** (1980), 216–227.

[4] N. Wang, Z. Zhang, A. Lim, “The stowage stack minimization problem with zero rehandle constraint,” *International Conference on Industrial, Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems,* Springer, 2014, 456–465.