日本オペレーションズ・リサーチ学会
2021年 春季研究発表会

整数値をもつゲームの平等主義的解について

05001245　東京工業大学　大塚貴郁　OTSUKA Takafumi

1.　はじめに

本稿では，特性関数値が整数値であり，利得ベクトルが整数ベクトルであるゲームにおける平等主義的解 (egalitarian solution) の性質について分析する．平等主義的解とは，譲渡可能な効用をもつ特性関数形ゲームにおける解概念の一つであり，各プレイヤーの自己利益最大化行動を考慮に入れながら，できるだけ平等に利得が分配されるようにした解のことをいう．Dutta–Ray (1989) [3] によって，特性関数値が実数値である場合に対してその概念が提唱された．一方，最適化の分野では，藤重 (1980) [5] による連続変数の辞書的最適基の先行研究があり，これは凸ゲームにおける平等主義的解と等価である．

上記の論文およびその後続研究では特性関数値が実数値のときのみが考察の対象となっており，特性関数値が整数値をもつゲームの平等主義的解の性質については明らかにされてこなかった．本研究の目的は，Frank–室田 [4] による離散変数の辞書的最適基の最近の研究成果を利用して，整数値をもつゲームの平等主義的解の性質を明らかにすることである．

2.　記号と用語の定義

プレイヤーの集合を $N = \{1, \dots, n\}$ とする．N の部分集合をここでは提携と呼ぶ．ベクトル $x \in \mathbf{R}^N$ の $S \subseteq N$ への制限を x_S と表記する．ベクトル $x, y \in \mathbf{R}^N$ に対して，任意の j について $x_j \leq y_j$ で，ある i について $x_i < y_i$ であることを，$x < y$ と表す．

特性関数 $v\colon 2^N \to \mathbf{R}$ は，提携 $S \subseteq N$ に属すプレイヤーが協力したときの利得を表す．プレイヤー i の利得を x_i とするとき，$x = (x_1, \dots, x_n)$ をゲーム (N, v) の利得ベクトルという．簡単のため，v の S への制限 v_S を単に v と記す．特性関数 v が優モジュラ関数であるゲーム (N, v) を凸ゲームと呼び，凸ゲーム全体の集合を Γ^{c} と表記する．提携 S，特性関数 v に対するコアは $C(S, v) = \{x \in \mathbf{R}^S \mid x(T) \geq v(T)\ (T \subsetneq S), x(S) = v(S)\}$ と定義される．ベクトル $x \in \mathbf{R}^N$ の成分を降順に並べたベクトルを $\tilde{x}$ と表す．$x(N) = y(N)$ なる $x \in \mathbf{R}^N$ と $y \in \mathbf{R}^N$ に対して，x が y をローレンツ支配するとは，任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して $\sum_{j=1}^{i} \tilde{x}_j \leq \sum_{j=1}^{i} \tilde{y}_j$ であり，少なくとも一つの i について，狭義の不等式 $(<)$ が成立することをいう．また，$\tilde{x} = \tilde{y}$ のとき，x と y は値同値であるという．

Dutta–Ray [3] は Lorenz コアという概念を導入した．Lorenz コアは次のように再帰的に定義される．まず各 $i \in N$ に対する Lorenz コア $L(\{i\}, v)$ を，$L(\{i\}, v) = \{v(\{i\})\}$ とする．$k = 2, 3, \dots, n$ に対して，$|T| = k - 1$ なるすべての提携 $T \subsetneq N$ に対する Lorenz コア $L(T, v)$ が定義されているとし，$E(L(T, v))$ を $L(T, v)$ のどの要素によってもローレンツ支配されないような，$L(T, v)$ の要素の全体とする．このとき，$|S| = k$ なる提携 $S \subseteq N$ に対する Lorenz コアを，

$$L(S, v) = \{x \in \mathbf{R}^S \mid x(S) = v(S) \text{ で，任意の } T \subsetneq S \text{ と任意の } y \in E(L(T, v)) \text{ に対して } x_T \not< y\}$$

と定義する．$E(L(N, v))$ の要素を平等主義的解と呼ぶ．整数値をもつゲームの平等主義的解の定義は，上で与えた諸概念の定義において $\mathbf{R}$ を $\mathbf{Z}$ に置き換えたものとする．

3.　整数値をもつゲームの平等主義的解

実数値をもつゲームの平等主義的解の性質について，主に以下の性質が明らかになっている [3]．

1. 任意のゲームにおいて，平等主義的解は高々 1 つしか存在しない (一意性)．
2. 凸ゲームにおいては，平等主義的解は必ず存在しコアに属する．
3. 凸ゲームにおいては，平等主義的解はそれ自身と異なる任意のコア配分をローレンツ支配する．

次の例により，整数値をもつゲームでは，平等主義的解は凸ゲームにおいても複数存在しうるこ

とがわかる．よって，性質 1 は整数の場合は成立しない．

例 3.1 $N = \{1,2,3\}$，特性関数 v を $v(\{1\}) = 40$，$v(\{2\}) = 60$，$v(\{3\}) = 80$，$v(\{1,2\}) = 110$，$v(\{1,3\}) = 120$，$v(\{2,3\}) = 150$，$v(N) = 210$ とした整数値をもつ凸ゲームを考える．このゲームの平等主義的解は $E(L(N,v)) = \{(60,70,80),(64,65,81),(65,64,81)\}$ と非一意である．ここで，$(60,70,80)$ はコア配分であるが，$(64,65,81),(65,64,81)$ はコア配分ではない．実際，$(64,65,81)$ と $(65,64,81)$ の第 2 成分と第 3 成分の和はそれぞれ $145, 146 < v(\{2,3\}) = 150$ なのでコアの条件を満たさない． ∎

本研究では，性質 2 に関して次の定理が成立することを示した．

定理 3.1 整数値をもつ凸ゲームにおいて，平等主義的解が常に存在する．

実数値をもつ凸ゲームでは，平等主義的解は必ずコアに属していたが，例 3.1 で示されているように，整数値をもつ凸ゲームではコアに属さない平等主義的解が存在しうる．すると，コアに属する平等主義的解の存在性が問題となるが，この問題は本研究では未解決である．

また，本研究では，整数値をもつ凸ゲームにおける平等主義的解は，性質 3 を満たさないことを示した．実際，例 3.1 において，コアに属さない平等主義的解 $(64,65,81)$ は，平等主義的解ではないコア配分 $(59,71,80)$ をローレンツ支配しない．

4. 縮小ゲームに関する整合性

前述のように，整数値をもつゲームにおいて，コアに属する平等主義的解が存在するかどうかは未解決であり，また，コアに属さない平等主義的解は性質 3 を満たさない．そこで本研究では，どんなコア配分によってもローレンツ支配されないコア配分全体の集合 (ローレンツ安定集合) に着目した．このアプローチは Arin–Inarra [1] による．本研究では，離散変数のローレンツ安定集合がマックス縮小ゲームに関する整合性と逆縮小ゲームに関する整合性 [6] を有することを明らかにした．実数値をもつゲームの平等主義的解がこれらの性質をもつことは Dutta [2] によって示されている．

ゲーム (N,v) に対するローレンツ安定集合 $\mathrm{LSS}(N,v)$ は以下のように定義される [1]. $\mathrm{LSS}(N,v) = \{x \in C(N,v) \mid \nexists y \in C(N,v) :$ y が x をローレンツ支配する $\}$．整数値をもつ凸ゲーム (N,v) において，$\mathrm{LSS}(N,v) \neq \emptyset$ である．また，離散変数のローレンツ安定集合は性質 3 を満たすことが知られている．さらに，本研究により，ローレンツ安定集合が次の二つの性質を有することを示した．

定理 4.1 (マックス縮小ゲームに関する整合性) 整数値をもつ凸ゲーム $(N,v) \in \Gamma^{\mathrm{c}}$ において $x \in \mathrm{LSS}(N,v)$ ならば，任意の $S \subseteq N$ に対して $x_S \in \mathrm{LSS}(S, v_S^x)$ である．ここで，$v_S^x \colon 2^S \to \mathbf{Z}$ は以下のように定義される関数である:

$$v_S^x(T) = \begin{cases} 0 & (T = \emptyset), \\ v(N) - x(N \setminus S) & (T = S), \\ \max_{Q \subseteq N \setminus S}\{v(T \cup Q) - x(Q)\} & (T \subsetneq S). \end{cases}$$

ゲーム (N,v) と利得ベクトル $x \in \mathbf{R}^N$ に対し，ゲーム (S, v_S^x) のことを，x のもとでの $S \subseteq N$ $(S \neq \emptyset)$ へのマックス縮小ゲーム，もしくは単に縮小ゲームという．

定理 4.2 (逆縮小ゲームに関する整合性) 整数値をもつ凸ゲーム $(N,v) \in \Gamma^{\mathrm{c}}$ において，$x \in \mathbf{Z}^N$ が

$\big[$ $x(N) = v(N)$ および $|S| = 2$ であるすべての提携 S に対して $x_S \in \mathrm{LSS}(S, v_S^x)$ $\big]$ を満たすならば，$x \in \mathrm{LSS}(N,v)$ である．

5. 謝辞

東京都立大学 経済経営学部 室田一雄教授には，本研究の遂行にあたり終始ご指導をいただいた．また，同大学同学部の飯村卓也教授および渡辺隆裕教授には有益なコメントをいただいた．

参考文献

[1] Arin, J., Inarra, E.: Egalitarian solutions in the core. *Int. J. Game Theory* **30** (2), 187–193 (2001)

[2] Dutta, B.: The egalitarian solution and reduced game properties in convex games. *Int. J. Game Theory* **19** (2), 153–169 (1991)

[3] Dutta, B., Ray, D.: A concept of egalitarianism under participation constraints. *Econometrica* **59**, 615–636 (1989)

[4] Frank, A., Murota, K.: Decreasing minimization on M-convex sets. arXiv: https://arxiv.org/abs/2007.09616.

[5] Fujishige, S.: Lexicographically optimal base of a polymatroid with respect to a weight vector. *Math. Oper. Res.* **5**, 186–196 (1980)

[6] 中山幹夫・船木由喜彦・武藤滋夫:『協力ゲーム理論』．勁草書房 (2008).