楕円内の距離分布

01102840　筑波大学　腰塚武志　　KOSHIZUKA Takeshi

1.　はじめに

これまで対象領域の形が円や長方形の場合，距離分布は厳密に求められてきた，ここでは楕円について距離分布を導出しよう．これまでと同じように距離分布の基本公式（文献 [2]）を用いるので，楕円と交わる直線の弦の長さと直線に下した垂線の長さの関係を求めなければならない．

2.　楕円内の距離分布

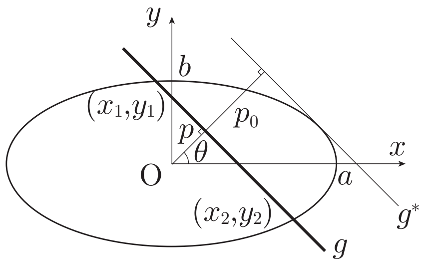

図 1　楕円とそれに交わる直線 g

まず図 1 のように中心が原点 O で長軸の長さが $2a$ 短軸の長さが $2b$ の楕円を考えると，これは

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

と表される．一方角度 θ の垂線の長さが p の直線は

$$x\cos\theta+y\sin\theta=p \tag{2}$$

となる．そこで両式より図 1 における楕円と直線の交点 (x_1,y_1) と (x_2,y_2) を求め，この 2 点間の距離 ℓ を計算すると

$$\begin{aligned}\ell =&\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\ =&\frac{2ab}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-p^2}\end{aligned} \tag{3}$$

となる．これをもとに基本公式を計算するのだが，弦の長さ ℓ が対象にしている距離 r よりも小さいと計算の対象から外さなければならない．そこで上式 (3) で $\ell=r$ として解いた p を p_r とすると

$$p_r=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-\frac{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^2}{4a^2b^2}r^2} \tag{4}$$

が得られる．式 (3) をみると ℓ は p に関して単調減少なので, ℓ が距離 r 以上の長さを持つ p の範囲は $0\le p\le p_r$ であることがわかる．そこで基本公式の $G_{r<\ell}$ に基づく p に関する積分は

$$\begin{aligned}&\int 2(\ell-r)\mathrm{d}p\\ &=2\int_0^{p_r}\ell\mathrm{d}p-2r\int_0^{p_r}\mathrm{d}p\\ &=2ab\arccos\frac{r\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}{2ab}\\ &-r\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\sqrt{1-\frac{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}{4a^2b^2}r^2}\end{aligned} \tag{5}$$

と導かれる．

ところで角度 θ の積分範囲は本来 $0<\theta<2\pi$ であるが，楕円の場合，同じものが繰り返されるので範囲を $0<\theta<\pi/2$ とし，これを 4 倍することにする．まず弦の長さ ℓ について角度 θ を固定したときの最大値 $\ell_{max}(\theta)$ は弦が原点 O を通る時なので $p=0$ であり，この時式 (3) より

$$\ell_{max}(\theta)=\frac{2ab}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}} \tag{6}$$

となっている．これを図示すると図 2 のようになり，こ

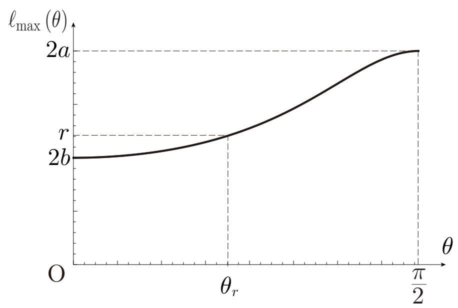

図 2　角度 θ の積分範囲

れより距離 r が $2b$ より小さい時は角度の制限はないが, $2b$ をこえると制限が出てくることがわかる．そこで式 (6) の左辺を r と置き，これより θ を求めて θ_r と置けば

$$\theta_r=\arccos\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}\left\{\left(\frac{2ab}{r}\right)^2-b^2\right\}} \tag{7}$$

が導かれる．これを図中に示してあるが，これより距離が $2b < r$ のときは角度の積分は上式 (7) を用いて $\theta_r < \theta < \pi/2$ の範囲となる．

以上により基本公式から式 (5) を被積分関数として $f_e(r,\theta)$ と置けば，楕円内の距離分布 $f(r)$ は

$$f(r) = \begin{cases} 4r \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_e(r,\theta)\mathrm{d}\theta & (0 < r < 2b \text{ のとき}) \\ 4r \displaystyle\int_{\theta_r}^{\pi/2} f_e(r,\theta)\mathrm{d}\theta & (2b < r < 2a \text{ のとき}) \end{cases} \tag{8}$$

とまとめることができる．

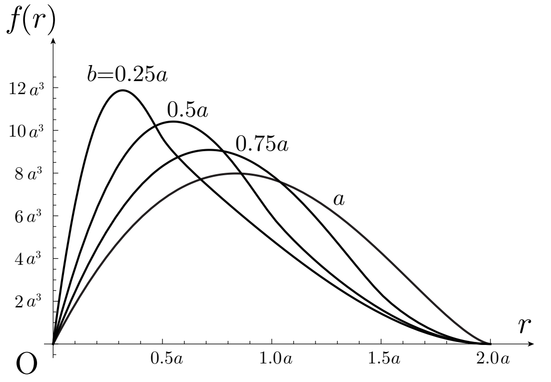

図 3　楕円の距離分布 $f(r)(a/b)^2$

そして $b = 0.25a$, $0.5a$, $0.75a$, a としたときの数値積分で求めた結果は図 3 のようになっている．距離分布の総量は面積×面積なので楕円の場合 $(\pi ab)^2$ となっており，b の値によって総量が変化してしまう．そこで小さい b の場合，分布の形状を比較するのが適切でない場合があるので，図上では総量が同じになるように比率 $(a/b)^2$ をかけた $f(r)(a/b)^2$ で表現されている．図で $b = a$ の場合（図の一番右）は当然のことながら半径 a の円の距離分布に等しい．

3.　距離の平均値

距離分布が数値積分によって算出するしかなかったので，平均値も数値積分にならざるを得ないと思うかもしれないが，Crofton の定理（文献 [1]）を用いると，計算が可能である．この定理は凸領域 C 内に 2 つの点 P_1, P_2 があって，この距離 r を C 内のすべての点のペアについて積分したものと，C と交わる直線 g の C における長さ ℓ の 4 乗を C と交わるすべて直線について積分したものについて

$$\int r\,\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2 = \frac{1}{6}\int \ell^4\,\mathrm{d}G \tag{9}$$

という関係が成り立つというものである．そこでこの式の右辺が計算できれば，距離の平均値を計算できることがわかる．

これを図 1 の楕円に当てはめて原点を楕円の中心に採ると，p の積分範囲は垂線の角度 θ の直線が楕円の周と接する g^* までとなる．そこでこの時の原点から垂線の足までの長さ p_0 は式 (3) において $\ell = 0$ とおけば

$$p_0 = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \tag{10}$$

と求められる．これを用いれば式 (9) の右辺の積分は

$$\begin{aligned} &\int \ell^4\,\mathrm{d}G \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{p_0} \ell^4\,\mathrm{d}p\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{512a^4b^4}{15}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\right)^3}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{512ab^4}{15}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\right)^3}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{512a^3b^2}{15}E(k) \end{aligned} \tag{11}$$

と導かれる．ただし $k = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ であり，$E(k)$ で第 2 種の完全楕円積分を表している．

以上により，この楕円の面積が πab であることから，楕円内の距離分布の平均値 $\bar{r}$ は

$$\bar{r} = \frac{\int r\,\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2}{\int \mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2 \int \mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2} = \frac{256a}{45\pi^2}E(k) = \frac{64}{45\pi^2}L_e(a,b) \tag{12}$$

と求められる．ただし楕円の周長を $L_e(a,b)$ とする．楕円の場合，円に近くても細長くても平均値は周長に同じ係数（約 1/7) をかけたものになるわけである．

4.　おわりに

式 (12) は大変重要な結果である．なぜなら実際の行政界等で距離分布を求めるとき，特に境界の細かい凹凸に左右されないために凸包をとった場合，その周長が平均値の推定に重要な役割を演じる可能性があることを示唆している．

参考文献

[1] 腰塚武志：『応用のための積分幾何学』，近代科学社 (2019).

[2] 腰塚武志：『距離分布からみる空間』，近代科学社 (2021 予定).