標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比

（その 2） フィボナッチ数列の拡張とフラクタルを目指した等角螺旋デザイン

01405264 大阪工業大学 *中西 真悟 NAKANISHI Shingo

1. はじめに

文献[1-3]では，代数螺旋でピタゴラスの定理を用いて標準正規分布の累積分関数の傾きを用いる提案を行った. 等角螺旋でも応用できるが，これを決める拡大および縮小による手順あるいはアルゴリズムを本研究ではOR的に探究してみたい.

2. 貴金属比の類似比に関わる代数螺旋と等角螺旋

（その1）では，ピタゴラスの定理を用いて黄金比の代数螺旋を紹介した．これを一般形に改めた貴金属比の類似比は

$$\Phi(k_n)\sqrt{1+n\Phi(k_n)^2}=1 \tag{1}$$

と表記できる. もしくは, 展開し直して従来の定義式とは異なる形式

$$n\Phi(k_n)^4+\Phi(k_n)^2-1=0 \tag{2}$$

を用いればよい[3]．このとき，黄金比，白銀比，青銅比は順番通りに $n=1,2,3$ と定義でき，$n=6$ に白金比がエントリーされる．本研究ではその連なる幾何学的特性を考慮した一般形式

$$m(m-1)\Phi\left(k_{m(m-1)}\right)^{-2j} -\Phi\left(k_{m(m-1)}\right)^{-2j+2}-\Phi\left(k_{m(m-1)}\right)^{-2j+4}=0 \tag{3}$$

を再考する．このとき，$n=m(m-1)$ が文献[3]で見つかったので，これも同様に展開した形式は

$$m^2-m-n=0 \tag{4}$$

が求まる. やはり, 従来式と類似するが異なる形式で表記される．式(1)の根号内部を用いて代数螺旋を描き，式(3)をフィボナッチ数列と同じ形式に見立てて拡張した

$$I_0=0, I_1=1,$$
$$I_{j+2}=I_{j+1}+m(m-1)I_j$$
$$j=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

を用いた

$$\Phi\left(k_{m(m-1)}\right)^{2j}=I_{j+1}+m(m-1)I_j\Phi\left(k_{m(m-1)}\right)^2 \tag{6}$$

が記述できる. この数式(6)を活用して図1A, 図1B, 図1Cを描くことができる.

3. 類似する数列による記述方法

ところで，m と $m-1$ に分けて数列式を記述するとき

$$\Phi\left(k_{m(m-1)}\right)^{2j}-(m-1)\Phi\left(k_{m(m-1)}\right)^{-2j+2} -m\Phi\left(k_{m(m-1)}\right)^{-2j+4}=0 \tag{7}$$

も相性が良い. 例えば, 白銀比($n=2$)の確率点 k_S を用いて表記するならば，式(3)でも式(7)でも

$$\Phi(k_S)=1+2\Phi(k_S)^2 \tag{8}$$

と記述できる．幾何学的に描けるパターンは多様にあるはずだが図1Bをベースとする変化を考えることができる. 一方で, 白金比は幾何学的に描くときには $n=12$ がベースとなる．式(3)で図示したものが図1Cと図1Dで, 式(7)で図示したものが図1Eである. では，黄金比に式(7)を適用するときは

$$\Phi(k_G)^{-2}-(m-1)-m\Phi(k_G)^2=0 \tag{9}$$

$$m\Phi(k_G)^2=1 \tag{10}$$

と式(4)に $n=1$ を代入して

$$\Phi(k_G)^{-2}-\Phi(k_G)^2-1=0 \tag{11}$$

が示せる[3]．すなわち,

$$m-1=\frac{1}{m}=\Phi(k_G)^2 \tag{12}$$

を用いて第2項と第3項が入れ替わる形式で表記できる．このことを記述する数列の一般形式は

$$J_0=1, J_1=m,$$
$$J_{j+2}=(m-1)J_{j+1}+mJ_j=m^{j+2}$$
$$j=0,1,2,\cdots \tag{13}$$

が得られる. 後は，フラクタルを目標に描けばよい.

参考文献

[1] 中西真悟，大西匡光，"Rotationally Symmetric Relations of Standard Normal Distribution Using Right Triangles, Circles, and Squares : Ordinary Differential Equations, Pythagorean Theorem, Equilateral Triangles, and Golden Ratio"，京都大学数理解析研究所講究録，No. 2158, pp.171-183, (2020).

[2] 中西真悟，"標準正規分布の幾何学的対称性 ― 三平方の定理による累積確率評価 ―"，大阪工業大学イノベーションデイズ2020, https://www.research.oit.ac.jp/sangaku/event/OITID-2020/seeds/seeds-4444/，(2020).

[3] 中西真悟, "ピタゴラスの定理と標準正規分布に基づく螺旋および等角図の幾何学的考察 ― 三角形と正方形や貴金属比の類似比によるアプローチ* ―", 大阪工業大学図書館紀要, Vol. 65，No. 2，pp.103-127，（2021年1月12日公表）現在印刷中.

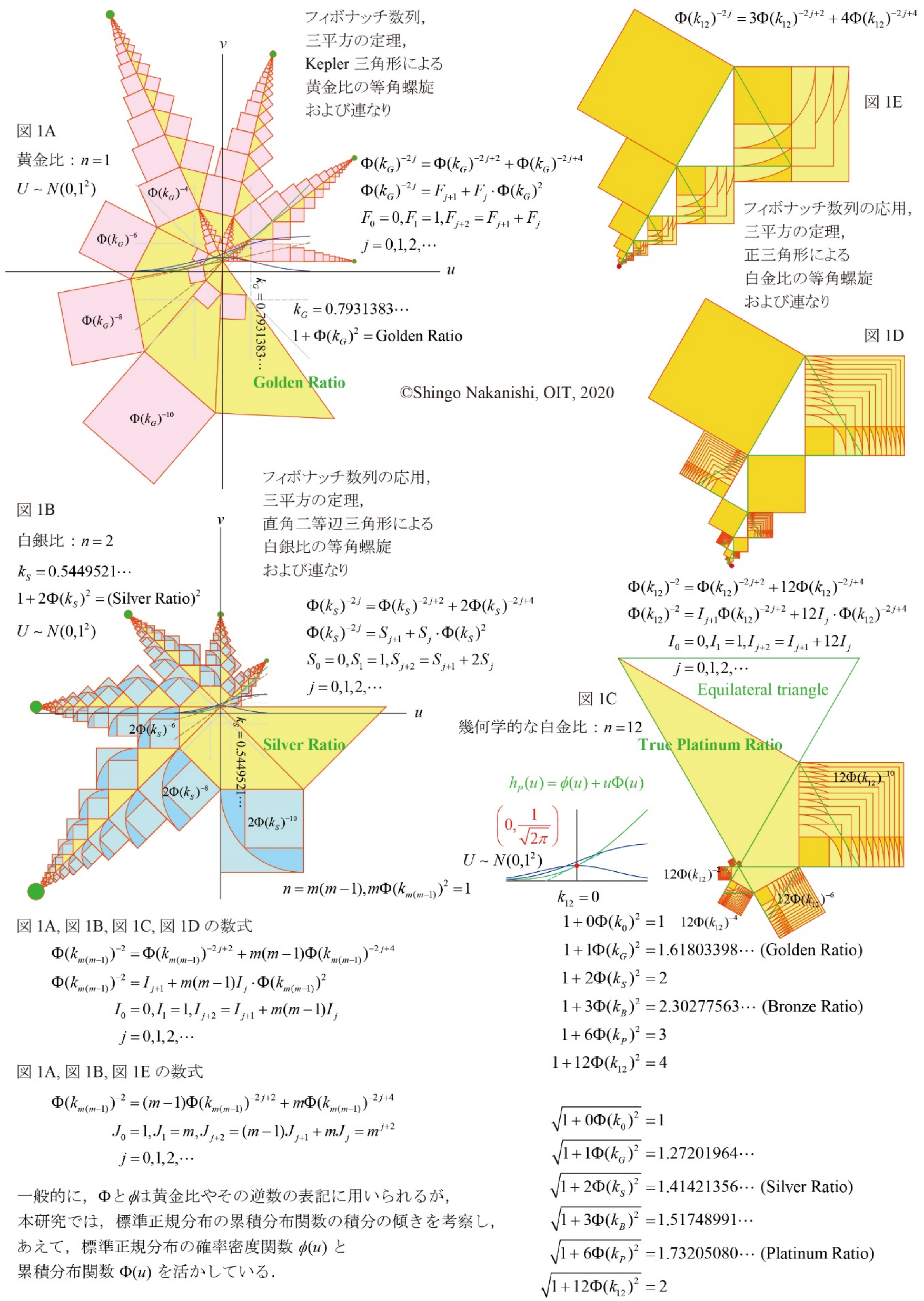

図１　フィボナッチ数列の拡張による等角螺旋のフラクタル・デザインを目指した概要図

謝辞　参考文献[3]の閲読者から貴重な助言を頂いたことを表記して深謝する．