途中退去する待ち行列モデルの分解公式による評価

01109930　群馬大学理工学府電子情報部門　河西 憲一　KAWANISHI Ken'ichi

1.　はじめに

本稿では単一窓口でサービスを提供する待ち行列モデルであって，客がサービス開始されるまでの時間に制限がある場合を考察する．客はポアソン過程に従って到着し，先着順でサービスを受ける．客のサービス時間はマルコフ型サービス過程に従うとする．客はサービスが開始されるまでの待ちを許容するが，待ち時間がある一定値に達してもサービスが開始されなければ，サービスを受けずに途中退去する．

このような待ち行列モデルについて，文献 [1] では客の経過待ち時間が従う 2 階微分方程式を解析し，二つの基本解を基礎に確率密度関数の解を得ている．一方，文献 [2] では積分微分方程式を直接解析することで，経過待ち時間の確率密度関数の解表現の一つが報告されている．文献 [2] の解表現は形式的ではあるが，文献 [3] で示されたマルコフ過程の解表現の自然な拡張と考えられる．本稿では同解表現に基づいた数値計算方法の検討結果を報告する．

2.　積分微分方程式による手法

客の到着過程が従うポアソン過程の到着率を $\lambda > 0$ とする．客のサービス時間を記述するマルコフ型サービス過程の状態空間を $\mathcal{M}$ とする．客のサービスの完了が伴わない推移を $\boldsymbol{C}$，サービスの完了が伴う推移を $\boldsymbol{D}$ で表し，$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ が既約なマルコフ連鎖の推移速度行列であるとする．

A_t を時刻 t でのサービス中の客の経過待ち時間，J_t を時刻 t でのサービス中の客に対するマルコフ型サービス過程の状態とする．客が途中退去するまでの時間を $\tau > 0$ とすると，待ち行列モデルが安定であるならば，マルコフ過程 $\{(A_t, J_t); t \geq 0\}$ の定常状態における確率密度関数 $\boldsymbol{a}(x)\ (x > 0)$ が存在する．

集合 A の指示関数を $\mathbb{I}_A(x)$ と表し，$\lambda(x) = \lambda \mathbb{I}_{[0,\tau)}(x)$ とする．文献 [1] の Lemma 4 と同様に考えることで，$\boldsymbol{a}(x)$ は次の積分微分方程式を満たすことが確認できる．

補題 1. $0 < x < \tau$ と $x > \tau$ に対して，

$$\boldsymbol{a}'(x) = \boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{C} + \int_x^\infty \boldsymbol{a}(y)\boldsymbol{D}\lambda(x)\exp\left[-\int_x^y \lambda(u)du\right]dy.$$

文献 [2] では補題 1 の積分微分方程式の解として次の結果が報告されている．

命題 1. $\boldsymbol{a}(x)$ は x に依存するある行列 $\boldsymbol{T}(x)$ を用いて次の形式をもつ．

$$\boldsymbol{a}(x) = \boldsymbol{a}(0)\boldsymbol{U}(0,x), \quad x \geq 0.$$

ここで $\boldsymbol{U}(x_0, x)$ は，

$$\partial_x \boldsymbol{U}(x_0,x) = \boldsymbol{U}(x_0,x)\boldsymbol{T}(x), \quad \boldsymbol{U}(x_0,x_0) = \boldsymbol{I}$$

の解であり，形式的に次のように定義される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}&(x_0,x)\\ &\triangleq \boldsymbol{I} + \int_{x_0}^x \boldsymbol{T}(x_1)dx_1\\ &\quad + \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^{x_2} \boldsymbol{T}(x_1)dx_1\right]\boldsymbol{T}(x_2)dx_2 + \cdots.\end{aligned}$$

文献 [3] と同様にマルコフ過程 $\{(A_t, J_t); t \geq 0\}$ の禁止過程（taboo process）を考察することで $\boldsymbol{T}(x)$ は次の方程式を満たすことが確認できる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(x) &= \boldsymbol{C} + \int_x^\infty \boldsymbol{U}(x,y)\boldsymbol{D}\\ &\qquad \times \lambda(x)\exp\left[-\int_x^y \lambda(u)du\right]dy, \quad x > 0.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{T}(x)$ が x に依存するならば，行列 $\boldsymbol{U}(x_0,x)$ はいわゆる順序付けられた行列指数関数である．もし $\boldsymbol{T}(x)$ が定数行列 $\boldsymbol{T}$ ならば，$\boldsymbol{U}(0,x)$ は $\boldsymbol{T}$ についての行列指数関数 $e^{\boldsymbol{T}x}$ に等しい．

命題 1 における $\boldsymbol{U}(x_0,x)$ に関する方程式は，1 階の線形微分方程式と同じ形式である．一般的に $\boldsymbol{T}(x)$ が x に依存するならばその解を求めることは難しく，近似手法に頼ることが多い．様々な近似手法が開発されているが，本稿では「分解公式」の手法を検討する．

3.　分解公式による評価

文献 [2] に従うならば，本稿で扱う待ち行列モデルに対しては，

$$\boldsymbol{T}(x) = \boldsymbol{C} + \lambda(x)\boldsymbol{Z}(x) \tag{1}$$

のように $\boldsymbol{T}(x)$ を分解できる．ここで，式 (1) における $\boldsymbol{Z}(x)$ は，$x \geq \tau$ ならば $\boldsymbol{Z}(x) = (-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}$ である．一方，$0 < x < \tau$ での $\boldsymbol{Z}(x)$ は次のように与えられる．

命題 2. $0 < x < \tau$ に対して $\boldsymbol{Z}(x) = \boldsymbol{W}(\tau - x)$ である．ここで，$\boldsymbol{W}(x)$ は次の非対称 Riccati 形行列微分方程式の解である．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}'(x) &= \boldsymbol{D} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)(\lambda\boldsymbol{I})\\ &\qquad - \boldsymbol{W}(x)(-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{W}(x) \quad (0 < x < \tau),\\ \boldsymbol{W}(0) &= (-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}.\end{aligned}$$

一般的に $\boldsymbol{T}(x)$ が次の形式で表現されるとする．

$$\boldsymbol{T}(x)=\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{T}_j(x).$$

このとき，$\boldsymbol{U}(x,x+\delta)$ を評価する近似式として，次のように定義される $\tilde{\boldsymbol{U}}(x,x+\delta)$ が知られている．

$$\tilde{\boldsymbol{U}}(x,x+\delta)=\prod_{p=1}^{n}e^{\boldsymbol{T}_{\sigma(p)}(x+\tau_p)\delta_p}. \tag{2}$$

式 (2) は分解公式あるいは積公式と呼ばれる．分解公式 $\tilde{\boldsymbol{U}}(x,x+\delta)$ を定めるパラメータの組み合わせ $\{\boldsymbol{T}_{\sigma(p)}(\cdot),\tau_p,\delta_p\}_{p=1}^{n}$ は様々であり，分解公式ごとに与えられる．つまり，分解公式は一意ではない．仮にすべての p について $e^{\boldsymbol{T}_{\sigma(p)}(x+\tau_p)\delta_p}$ が数値計算可能であれば，分解公式を使うことで順序付けられた行列指数関数を行列指数関数の積で近似評価できる．

本稿で扱う待ち行列モデルについては，$0<x<\tau$ で $\lambda(x)=\lambda$ であるので，$\boldsymbol{T}(x)=\boldsymbol{C}+\lambda\boldsymbol{Z}(x)$ である．このとき，例えば次の $\tilde{\boldsymbol{V}}_1(x,x+\delta)$ は $\boldsymbol{U}(x,x+\delta)$ の分解公式の一つである．

$$\tilde{\boldsymbol{V}}_1(x,x+\delta)=e^{\boldsymbol{C}\delta}e^{\lambda\boldsymbol{Z}(x+\delta)\delta}.$$

一様化の手法により $e^{\boldsymbol{C}\delta}$ は数値計算可能である．他方で $e^{\lambda\boldsymbol{Z}(x+\delta)\delta}$ については，$\boldsymbol{Z}(x+\delta)$ が確率行列であることから ML 行列の行列指数関数を求めることに帰着する．よって，$\boldsymbol{Z}(x+\delta)$ を例えば命題 2 に基づいて評価できれば，$e^{\lambda\boldsymbol{Z}(x+\delta)\delta}$ も一様化の手法を応用することで数値計算可能である．

様々な分解公式 $\tilde{\boldsymbol{U}}(x,x+\delta)$ のうち，特に

$$\tilde{\boldsymbol{U}}(x,x+\delta)=[\tilde{\boldsymbol{U}}(x+\delta,x)]^{-1}$$

が成立するとき，$\tilde{\boldsymbol{U}}(x,x+\delta)$ を $\boldsymbol{U}(x,x+\delta)$ の対称な分解公式という．例えば $\boldsymbol{T}(x)=\boldsymbol{C}+\lambda\boldsymbol{Z}(x)$ であれば，

$$\tilde{\boldsymbol{U}}_1(x,x+\delta)=e^{\boldsymbol{C}\delta/2}e^{\lambda\boldsymbol{Z}(x+\delta/2)\delta}e^{\boldsymbol{C}\delta/2}$$

とすると，$\tilde{\boldsymbol{U}}_1(x,x+\delta)$ は $\boldsymbol{U}(x,x+\delta)$ の対称な分解公式である．文献 [4] の解析結果によると，$\boldsymbol{U}(x,x+\delta)=\tilde{\boldsymbol{U}}_1(x,x+\delta)+O(\delta^3)$ であり，さらに高次の近似式を与える対称な分解公式が，次の漸化式により得られるとされる．

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{U}}_{k+1}(x,x+\delta)=\\&\quad\tilde{\boldsymbol{U}}_k(x,x+s_k\delta)\times\tilde{\boldsymbol{U}}_k(x+s_k\delta,x+2s_k\delta)\\&\quad\times\tilde{\boldsymbol{U}}_k(x+2s_k\delta,x+(1-2s_k)\delta)\\&\quad\times\tilde{\boldsymbol{U}}_k(x+(1-2s_k)\delta,x+(1-s_k)\delta)\\&\quad\times\tilde{\boldsymbol{U}}_k(x+(1-s_k)\delta,x+\delta),\quad k\geq 1,\end{aligned}$$

ここで，$s_k=1/(4-4^{1/(2k+1)})$ である．分解公式 $\tilde{\boldsymbol{U}}_k(x,x+\delta)$ の近似精度については，Taylor 展開に基づくより詳細な解析によると，次の評価結果が知られている [5]．

表 1: $\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{e}$ の数値例

x	文献 [1]	分解公式	誤差
0.0	0.354556	0.354556	6.69×10^{-7}
0.1	0.313690	0.313689	8.72×10^{-7}
0.2	0.284679	0.284678	9.99×10^{-7}
0.3	0.264018	0.264017	1.07×10^{-6}
0.4	0.249248	0.249247	1.11×10^{-6}
0.5	0.238643	0.238642	1.13×10^{-6}
0.6	0.230991	0.230990	1.12×10^{-6}
0.7	0.225441	0.225440	1.11×10^{-6}
0.8	0.221398	0.221397	1.09×10^{-6}
0.9	0.218443	0.218442	1.07×10^{-6}
1.0	0.216284	0.216283	1.04×10^{-6}

命題 3. すべての $\{\boldsymbol{T}_j(\cdot)\}_{j=1}^{m}$ に対して $[x,x+\delta]$ 上で $\|\partial_x^{2k}\boldsymbol{T}_j(x)\|<\infty$ であれば，

$$\|\boldsymbol{U}(x,x+\delta)-\tilde{\boldsymbol{U}}_k(x,x+\delta)\|\in O(\delta^{2k+1}).$$

対称な分解公式 $\tilde{\boldsymbol{U}}_1(x,x+\delta)$ を使った数値例を表 3 に示す．サービス過程は背後過程が二つの状態から構成されるマルコフ変調ポアソン過程，途中退去するまでの時間は $\tau=1$ とし，$[0,\tau]$ 上の経過待ち時間の確率密度関数 $\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{e}$ を $\delta=1/100$ に対して評価した．

4. おわりに

本稿では待ち客の途中退去が伴う単一窓口待ち行列モデルについて，分解公式で評価する方法を検討した．

謝辞

本研究は科学研究費助成事業基盤研究 (C)（課題番号：20K04980）による補助を受けた．ここに謝意を表する．

参考文献

[1] K. Kawanishi and T. Takine, MAP/M/c and M/PH/c queues with constant impatience times, Queueing Systems, **82**(3-4) (2016), 381–420.

[2] 河西 憲一, 客が途中退去する待ち行列モデルの定常分布の解形式，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2020 年春季研究発表会アブストラクト集, (2020), 104–105.

[3] B. Sengupta, Markov processes whose steady state distribution is matrix-exponential with an application to the $GI/PH/1$ queue, Advances in Applied Probability, **21** (1989), 159–180.

[4] M. Suzuki, General decomposition theory of ordered exponentials, Proceedings of the Japan Academy, Series B, **69**(7) (1993), 161–166.

[5] N. Wiebe et al., Higher order decompositions of ordered operator exponentials, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **43** (2010), 065203.