冗長システムに対する拡張年齢取替方策

02602443　愛知工業大学　*水谷聡志　MIZUTANI Satoshi
01400043　愛知工業大学　中川覃夫　NAKAGAWA Toshio

1.　はじめに

情報システムの高度化に伴い，複雑なシステムの取替保全を計画的に実施する必要性が高まっている．近年，作業完了時刻と定期保全時刻に対し，どちらか早期に発生した時刻に取替保全を実施するモデル (Replacement First) と，後に発生した時刻に取替保全を実施するモデル (Replacement Last) について比較検討する研究がなされている [1].

本研究では，これらのモデルに対応したいくつかの拡張年齢取替方策を提案する．各方策に対して単位時間当りの期待費用を導出し，それを最小にする最適な取替時期について議論する．とくに，直列，並列システムなどの冗長システムを具体例として表すことができるランダム K-out-of-n システム [2] の具体例として 4 ユニット並直列システムを拡張年齢取替に適応する．

2.　拡張年齢取替方策

n 個のユニットから構成されるシステムを考える．システムは時刻 Y_j $(j=1,2,\ldots,N)$ に予防保全を実施可能とする．Y_j の具体例として，作業活動の完了時刻を表すと考えることができる．作業途中の保全取替活動は，仕事の遅延など費用を必要とするため実施しない．Y_j は有限な平均 $1/\theta_j$ をもつ独立な一般分布 $G_j(t)$ に従うと仮定する．$Y_{\mathrm{m}} \equiv \min\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_N\}$ とするとき，

$$\Pr\{Y_{\mathrm{m}} \le t\} = 1-\prod_{j=1}^{N}\overline{G}_j(t), \tag{1}$$

また $Y_{\mathrm{M}} \equiv \max\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_N\}$ とするとき，

$$\Pr\{Y_{\mathrm{M}} \le t\} = \prod_{j=1}^{N} G_j(t). \tag{2}$$

このとき，年齢取替を拡張した四つの取替方策について検討する．

(a) Replacement First

システムは時刻 T $(0 \le T \le \infty)$ または時刻 Y_{m} のどちらか早い時刻で予防保全を実施する．すなわち，時刻 $Y_F \equiv \min\{T, Y_{\mathrm{m}}\}$ にユニットを事前取替する．このとき，Y_F の分布は

$$G_F(t) \equiv \Pr\{Y_F \le t\} = \begin{cases} 1-\prod_{j=1}^{N}\overline{G}_j(t) & t<T, \\ 1 & t \ge T. \end{cases} \tag{3}$$

(b) 拡張 Replacement First

システムは時刻 T $(0 < T \le \infty)$ または時刻 Y_{M} のどちらか早い時刻で予防保全を実施する．すなわち，時刻 $\widetilde{Y}_F \equiv \min\{T, Y_{\mathrm{M}}\}$ にユニットを事前取替する．このとき，$\widetilde{Y}_F$ の分布は

$$\widetilde{G}_F(t) \equiv \Pr\{\widetilde{Y}_F \le t\} = \begin{cases} \prod_{j=1}^{N} G_j(t) & t<T, \\ 1 & t \ge T. \end{cases} \tag{4}$$

(c) Replacement Last

システムは時刻 T $(0 \le T < \infty)$ または時刻 Y_{M} のどちらか遅い時刻で予防保全を実施する．すなわち，時刻 $Y_L \equiv \max\{T, Y_{\mathrm{M}}\}$ にユニットを事前取替する．このとき，Y_L の分布は

$$G_L(t) \equiv \Pr\{Y_L \le t\} = \begin{cases} 0 & t<T, \\ \prod_{j=1}^{N} G_j(t) & t \ge T. \end{cases} \tag{5}$$

(d) 拡張 Replacement Last

システムは時刻 T $(0 \le T < \infty)$ または時刻 Y_{m} のどちらか遅い時刻で予防保全を実施する．すなわち，時刻 $\widetilde{Y}_L \equiv \max\{T, Y_{\mathrm{m}}\}$ にユニットを事前取替する．このとき，$\widetilde{Y}_L$ の分布は

$$\widetilde{G}_L(t) \equiv \Pr\{\widetilde{Y}_L \le t\} = \begin{cases} 0 & t<T, \\ 1-\prod_{j=1}^{N}\overline{G}_j(t) & t \ge T. \end{cases} \tag{6}$$

3. 単一ユニットシステム

システムは故障分布 $F(t)$ をもつ単一ユニットから構成される場合について検討する．

3.1. 単位時間当りの期待費用

予防保全が実施可能な時刻 Y は有限な平均 $1/\theta$ をもつ時間分布 $G(t)$ に従うと仮定する．システムは故障の発生または時刻 Y の早い方の時刻でユニットの取替を実施する．このとき，単位時間当りの期待費用は次式で与えられる．

$$C_A(G) = \frac{c_R + (c_F - c_R)\int_0^\infty \overline{G}(t)\mathrm{d}F(t)}{\int_0^\infty \overline{F}(t)\overline{G}(t)\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

ここで $c_R =$ 時刻 T での取替費用，$c_F =$ 故障による取替費用であり，$c_F > c_R$ である．

次に (7) 式を拡張することによって，前節で考えた (a), (b), (c), (d) の拡張年齢取替方策に対する単位時間当りの期待費用を求める．

(a) Replacement First

$G(t) = G_F(t)$ とおくと単位時間当りの期待費用は

$$C_{1F}(T) = \frac{c_R + (c_F - c_R)\int_0^T \prod_{j=1}^N \overline{G}_j(t)\mathrm{d}F(t)}{\int_0^T \prod_{j=1}^N \overline{G}_j(t)\overline{F}(t)\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

(b) 拡張 Replacement First

$G(t) = \widetilde{G}_F(t)$ とおくと単位時間当りの期待費用は

$$\widetilde{C}_{1F}(T) = \frac{c_R + (c_F - c_R)\int_0^T [1 - \prod_{j=1}^N G_j(t)]\mathrm{d}F(t)}{\int_0^T [1 - \prod_{j=1}^N G_j(t)]\overline{F}(t)\mathrm{d}t}. \tag{9}$$

(c), (d) の場合も同様に議論する．

3.2. 最適方策

3.1 節で求めた費用を最小にする予防保全の時刻について議論する．

(a) Replacement First

$C_{1F}(T)$ を T で微分して 0 とおくと，

$$\int_0^T \prod_{j=1}^N \overline{G}_j(t)\overline{F}(t)[h(T) - h(t)]\mathrm{d}t = \frac{c_R}{c_F - c_R}. \tag{10}$$

上式の左辺は T に関して 0 から ∞ に単調に増加する．これより，(10) 式を満たす有限で唯一の T_{1F}^* $(0 < T_{1F}^* < \infty)$ が存在する．このとき単位時間当りの期待費用は

$$C_{1F}(T_{1F}^*) = (c_F - c_R)h(T_{1F}^*). \tag{11}$$

(b), (c), (d) の場合も同様に議論する．

4. 並直列システム

ユニットは有限な平均 $1/\lambda$，故障率 $h(t)$ をもつ故障分布 $F(t)$ に従うとする．このとき，ランダム K-out-of-n システムの時刻 t における信頼度は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n p_K \sum_{j=k}^n \binom{n}{j}[\overline{F}(t)]^j[F(t)]^{n-j} \\
&= \sum_{k=1}^n P_k \binom{n}{k}[\overline{F}(t)]^k[F(t)]^{n-k}.
\end{aligned} \tag{12}$$

で与えられる．ここでは，4 つのユニットからなる並直列システムを考える．(12) 式において $n = 4$, $P_1 = 0$, $P_2 = 2/3$, $P_3 = 1$, $P_4 = 1$ とすれば，4 つのユニットからなる並直列システムとなる．このとき，システムの故障分布は

$$F_1(t) = 1 - \overline{F}(t)^2[1 + F(t)]^2.$$

システムの故障率は

$$h_1(t) \equiv \frac{4h(t)F(t)}{1 + F(t)}$$

であり，t に関して 0 から ∞ に増加する．

このシステムについて，前節で議論した (a), (b), (c), (d) の場合について議論する．

謝辞

本研究の一部は，文部科学省科学研究費基金 (基盤研究 (C)) 課題番号 (20K04992)(2020-2022) による補助を受けている．

参考文献

[1] X. Zhao and T. Nakagawa, Optimization problems of replacement first or last in reliability theory. European Journal of Operational Research, vol. 223, pp. 141–149, 2012.

[2] K. Ito and T. Nakagawa, Reliability Properties of K-out-of-N:G Systems. In: M. Ram, T. Dohi (eds) System Engineering: Reliability Analysis Using k-out-of-n Structures, CRC Press, Boca Raton, 2019, 25-40.