連続時間モデルに基づく業績条件付ストック・オプションの価値評価の方法

01007984 大阪大学 大学院経済学研究科　　　＊大西　匡光　OHNISHI Masamitsu
数理・データ科学教育研究センター
EY 新日本有限責任監査法人　　　田中　寧々　TANAKA Nene[1]

1．はじめに

松本，大西，田中［1］では，売上げや利益などの業績に権利行使の条件を付したストック・オプションに対して，連続時間の株価と業績（強度）との結合確率過程に基づく価値評価モデルを提案し，そのもとで，通常のオプションの価値評価のためのブラック・ショールズ価格式に業績条件を組み入れた形式を持つ価格式を導出した．本報告では，さらに，(a) 株価と業績との相関が価格に与える影響についての比較静学の解析結果，(b) モデルに含まれるパラメータの推定方法，(c) 実データに基づく数値計算例，を報告する．

2．業績条件付ストック・オプションの評価モデル

リスク中立確率測度 $\mathbb{Q}$ が導入された適当な確率空間の上で，下記の確率モデルを考える：

連続時間 $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ 上で企業活動がなされ，離散時間 $\mathbb{Z}_+ \coloneqq \{0,1,\ldots\} \subset \mathbb{R}_+$ において会計・財務上の報告・開示がなされるものとする．ただし，簡単のため，単位時間を 1（年）として，時点 $T-1$ から時点 T までの時間区間 $(T-1,T]$ を第 T 期（間）と呼ぶ．ストック・オプションが付与される時刻を時点 0 とする．

- **株価モデル（$\boldsymbol{S_t, t \geq 0}$）：**

ブラック・ショールズ・モデルと同様，時点 t での株価 S_t は幾何ブラウン運動に従うと仮定する：

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S W_t^S\right\} = S_0 \mathrm{e}^{X_t}, \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

あるいは，対数株価 $X_t = \ln S_t - \ln S_0$ は

$$X_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S W_t^S = \mu_X t + \sigma_S W_t^S, \qquad t \geq 0 \tag{2}$$

ここで $(W_t^S, t \geq 0)$ は標準ブラウン運動，$r \geq 0$ は連続複利での無リスク利子率，$\sigma_S > 0$ はボラティリティ・パラメータであり，$\mu_X \coloneqq r - \sigma_S^2/2$ としている．このとき，$W_t^S \sim N(0,t)$ により，$X_t \sim N(\mu_X t, \sigma_S^2 t)$ となる．

- **業績モデル（$\boldsymbol{C_n, n = 1, 2, \ldots}$）：**

企業の業績は，通常，年度ごとや四半期ごとに開示される．この非連続的［離散時間的］な業績を連続時間モデルによって表現するために，まず，日々の業績よりもさらに小さい微小区間での業績強度［率］過程を考える．時点 $s \geq 0$ での業績強度を Y_s とし，負の値も取り得るので，ドリフト付きブラウン運動を用いて，

$$Y_s = Y_0 + \mu_Y s + \sigma_Y W_s^Y, \qquad s \geq 0 \tag{3}$$

とモデル化する．ただし $(W_s^Y, s \geq 0)$ は標準ブラウン運動，Y_0，μ_Y，σ_Y はパラメータである．また 2 つの標準ブラウン運動 $(W_t^S, t \geq 0)$，$(W_s^Y, s \geq 0)$ の相関を $\rho_{SY} \in [-1,1]$ とする，すなわち，$\mathrm{d}W_t^S \cdot \mathrm{d}W_t^Y = \rho_{SY}\mathrm{d}t$ と仮定する．つぎに，この業績強度 Y_s を使って，第 n 期の業績 C_n をつぎのように定義する：

$$C_n = \int_{n-1}^{n} Y_s \mathrm{d}s = \int_{n-1}^{n} (Y_0 + \mu_Y s + \sigma_Y W_s^Y)\mathrm{d}s, \qquad n \geq 1, \tag{4}$$

つまり，期間中での業績強度の累積がその期の業績であると考える．このとき業績評価期間の第 T 期の業績 C_T は正規分布 $N(\mu_C, \sigma_C^2)$ に従う，ただし，μ_C，σ_C は所与の諸パラメータから導出される（が省略する）．

- **リスク中立オプション評価 $\boldsymbol{P_T, T \geq 1}$：**

まず，満期（行使日）T を持ち，業績 C_T に下限 L の条件の付けられたストック・オプションの価格 P_T は，リスク中立評価公式により，下記の通りに計算される．

$$P_T \coloneqq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}[S_T - K]_+; C_T > L], \tag{5}$$

ただし，

[1] 本論文は第２著者の田中寧々が大阪大学経済学部に在籍中に提出した懸賞論文に依っているが，現在の所属での業務との関わりは無い．

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X;A]$：事象 A 上に制限された確率変数 X の期待値，r：無リスク利子率，　T：満期，
S_T：時点 T における株価，　K：権利行使価格，C_T：第 T 期における業績，
L：ストック・オプション行使のための業績の下限，　e^{-rT}：現在価値への割引率．

3． 業績条件付ストック・オプションの価格式の導出

第２節でのモデルのもとでは対数株価 X_T と業績 C_T とは２変量正規分布に従うことに注意する：

$$\begin{pmatrix} X_T \\ C_T \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \sigma_{XC} \\ \sigma_{XC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix}\right] = N\left[\begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \rho_{XC}\sigma_S\sigma_C\sqrt{T} \\ \rho_{XC}\sigma_S\sigma_C\sqrt{T} & \sigma_C^2 \end{pmatrix}\right] \tag{6}$$

ただし，σ_{XC}，ρ_{XC} も所与の諸パラメータから導出される．そこで，式(5)を以下のように書き換える．

$$P_T = S_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{X_T - rT}; X_T > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), C_T > L\right] - K\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{Q}\left(X_T > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), C_T > L\right) \tag{7}$$

式(7)の右辺を業績 C_T について条件付け，標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(z)$ を用いて表現すれば，ブラック・ショールズ・モデルによるオプション価格式と対比的に，

$$\begin{aligned} P_T = \int_{c_T=L}^{\infty} \Bigg\{ & S_0 \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T + \mu_X T + \rho_{XC}\frac{\sigma_S\sqrt{T}}{\sigma_C}(c_T - \mu_C)}{\sqrt{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2}}\right) \\ & \times \exp\left(\frac{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}{2} + \mu_X T + \rho_{XC}\frac{\sigma_S\sqrt{T}}{\sigma_C}(c_T - \mu_C) - rT\right) \\ & - K\mathrm{e}^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_X T + \rho_{XC}\frac{\sigma_S\sqrt{T}}{\sigma_C}(c_T - \mu_C)}{\sqrt{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}}\right)\Bigg\} f_{C_T}(c_T)\mathrm{d}c_T \end{aligned} \tag{8}$$

と表される，ただし，

$$f_{C_T}(c_T) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_C^2}}\exp\left\{-\frac{(c_T - \mu_C)^2}{2\sigma_C^2}\right\} \tag{9}$$

あるいは，相関 ρ_{XC} の２変量標準正規分布関数 $\Phi_2(x, y; \rho_{XC})$ を用いて，以下のようにも整理される[2]：

$$\begin{aligned} P_T = {} & S_0 \Phi_2\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_X T}{\sigma_S\sqrt{T}} + \sigma_S\sqrt{T}, \frac{\mu_C - L}{\sigma_C} + \rho_{XC}\sigma_S\sqrt{T}; \rho_{XC}\right) \\ & - K\mathrm{e}^{-rT}\Phi_2\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_X T}{\sigma_S\sqrt{T}}, \frac{\mu_C - L}{\sigma_C}; \rho_{XC}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

4． ストック・オプション価格 P_T の相関係数 ρ_{SY} への依存性

（より一般的な業績条件のもとで）下記の比較静学結果を得る．

定理：ストック・オプション価格 P_T は，株価過程と業績強度過程とをそれぞれを駆動する 2 つのブラウン運動間の相関係数 ρ_{SY} の単調非減少関数である．

5． パラメータの統計的推定

評価モデルにおける諸パラメータについては，まずは対数株価 $(X_t, t \geq 0)$ の（準）連続時間観測，あるいは離散時間観測によってパラメータ σ_S を推定したのち，離散時間での対数株価・業績 $((X_n, C_n), n = 1,2,\dots)$ の同時観測によりパラメータ Y_0, μ_Y, σ_Y を，そして ρ_{SY} を，原則，最尤推定法によって（数値的最適化手法を用いて）推定すれば良いが，より簡便な方法については，紙面の制約上，詳細は発表当日に説明する．

6． 数値計算例

業績条件付きストック・オプションの価値評価ついて，実データを用いた数値計算結果を得ているが，紙面の制約上，発表当日に報告する．

参考文献

[1] 松本敏幸，大西匡光，田中寧々「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価」日本オペレーションズ・リサーチ学会 2020 年度春季研究発表会アブストラクト集，2020.

---

[2] 吉羽要直氏（東京都立大学教授）より，相関を持つ２変量正規分布の累積分布関数を用いた，積分を含まない，簡潔な表現 (10) が可能であることを御教示頂いた．ここに記して感謝の意を表します．