日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 秋季研究発表会

強 Condorcet 規準と Kemeny 順序

01013123　静岡大学　　安藤和敏　ANDO Kazutoshi
02203940　東京理科大学　鮏川矩義　SUKEGAWA Noriyoshi
05000956　静岡大学　*高木祥多　TAKAGI Shota

1.　はじめに

X を m 個の要素を持つ有限集合とする．X は代替案の集合として解釈される．X 上の**順序** (あるいは, X に対する**ランキング**) とは全単射 $r\colon X \to \{1,\cdots,m\}$ である．X に対する 2 つのランキング r, r' に対して, r と r' の **Kendall のタウ距離** $\Delta(r,r')$ は

$$\begin{aligned}\Delta(r,r') &= |\{\{x,y\} \in \tbinom{X}{2} \mid \\ &\qquad (r(x)-r(y))(r'(x)-r'(y)) < 0\}|\end{aligned}$$

によって定義される．ここで, 任意の正整数 k に対して $\binom{X}{k} = \{S \mid S \subseteq X, |S| = k\}$ である．$N = \{1,\cdots,n\}$ を投票者の集合として解釈される有限集合とする．X に対する**ランキング・プロファイル**とは, 各投票者 j の X に対するランキング r^j の集まり $R = (r^j)_{j\in N}$ である．X に対するランキング・プロファイル $R = (r^j)_{j\in N}$ と X 上のランキング r に対して,

$$d(r,R) = \sum_{j=1}^{n} \Delta(r,r^j) \qquad (1)$$

と定義する．R に関する **Kemeny 順序**は, $d(r,R)$ を最小化するランキング r である．Kemeny 順序を求める問題は NP-困難であるが [1], その計算に対するアルゴリズムに関して多くの研究成果がある (例えば, [2],[3] を見よ)．また, Sukegawa 他 [4] は, Kemeny 順序を求める問題の整数計画問題としての定式化の中の冗長な不等式制約について論じている．

Kemeny ルールとは, 与えられた任意のプロファイル R に対して R に関する Kemeny 順序を返すランキング集約ルールである．ランキング集約ルールの満たすべき性質の一つとして Condorcet 規準があり, Kemeny ルールはこれを満たすことが知られている．Truchon [5] は Condorcet 規準の自然な拡張として (Condorcet 規準より強い条件である) 拡張 Condorcet 規準を導入し, Kemeny ルールが拡張 Condorcet 規準を満足することを示した．本研究では, 拡張 Condorcet 規準よりさらに強い条件である強 Condocet 規準を導入し, Kemeny ルールが強 Condorcet 規準を満足することを示す．さらにこの結果を用いて, Sukegawa 他 [4] によって得られた冗長制約とは異なるタイプの冗長制約のクラスを導く．

2.　準備

N を投票者集合とし, $R = (r^j)_{j\in N}$ を代替案集合 X に対するランキング・プロファイルとする．任意の $x, y \in X$ with $x \neq y$ に対して $V_{xy}(R)$ を

$$V_{xy}(R) = |\{j \mid j \in N, r^j(x) < r^j(y)\}| \qquad (2)$$

で定義する．　プロファイル R に関する**多数グラフ** $G(R) = (X, A(R))$ 及び**強多数グラフ** $G^+(R) = (X, A^+(R))$ は,

$$\begin{aligned}A(R) &= \{(x,y) \mid V_{xy}(R) \geq V_{yx}(R)\}, &(3)\\ A^+(R) &= \{(x,y) \mid V_{xy}(R) > V_{yx}(R)\} &(4)\end{aligned}$$

によって定義される．強多数グラフ $G^+(R)$ において出次数が $m-1$ を持つ点 $x \in X$ は, プロファイル R における **Condorcet 勝者**と呼ばれる．Condorcet 勝者は必ずしも存在するとは限らないが, 存在すれば一意である．

ランキング集約ルール f とは, 任意のランキング・プロファイル R が与えられたときに, すべての個人のランキングを集約して一つのランキング $f(R)\colon X \to \{1,\cdots,m\}$ を決定するルール f である．ランキング集約ルールの持つべき性質の一つとして Condorcet 規準がある．

定義 2.1 (Condorcet 規準) ランキング集約ルール f に対する Condorcet 規準とは, 任意の代替案 $x \in X$ と任意のプロファイル R に対して, もし x が R における Condorcet 勝者ならば $f(R)(x) = 1$ が成り立つことである．

Kemeny ルールは Condorcet 規準を満たすことが知られている．

補題 2.2 R を任意のプロファイルとする．多数グラフ $G(R) = (X, A(R))$ の強連結成分分解に対応する X の分割 $\mathcal{P}(R) = \{X_1,\cdots,X_l\}$ で

$$i < j \Longrightarrow \forall x \in X_i, \forall y \in X_j\colon (x,y) \in A^+(R) \qquad (5)$$

を満たすものが存在する．

補題 2.2 で与えられる分割 $\mathcal{P}(R)$ を**自然な分割**と呼ぶ.

Truchon [5] によって導入された拡張 Condorcet 規準は Condorcet 規準の自然な拡張である.

定義 2.3 (拡張 Condorcet 規準) ランキング集約ルール f に対する拡張 Condorcet 規準とは, R を任意のプロファイルとし $\mathcal{P}(R) = \{X_1, \cdots, X_l\}$ を X の自然な分割とするとき以下が成り立つことである.

$$i < j \Longrightarrow \forall x \in X_i, \forall y \in X_j \colon f(R)(x) < f(R)(y).$$

命題 2.4 (Truchon [5]) Kemeny ルールは拡張 Condorcet 規準を満たす.

3. 強 Condorcet 規準

R を任意のプロファイルとする. R に関する強多数グラフ $G^+(R) = (X, A^+(R))$ の強連結成分分解に対応する X の分割を $\mathcal{P}^+(R)$ とする.

定義 3.1 (強 Condorcet 規準) ランキング集約ルール f に対する強 Condorcet 規準とは, R を任意のプロファイルとするとき以下が成り立つことである.

$$\begin{aligned} &\forall Y, Z \in \mathcal{P}^+(R) \text{ with } Y \neq Z, \forall y \in Y, \forall z \in Z \colon \\ &\quad (y, z) \in A^+(R) \Longrightarrow f(R)(y) < f(R)(z). \end{aligned} \tag{6}$$

命題 3.2 強 Condorcet 規準は拡張 Condorcet 規準を含意する.

次の定理 3.3 は本研究の主結果である.

定理 3.3 Kemeny ルールは強 Condorcet 規準を満たす.

4. 線形順序付け問題における冗長性制約

代替案の集合 X に対するランキング r に対して,

$$x_{st} = \begin{cases} 1 & \text{if } r(s) < r(t), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義されるベクトル $x = (x_{st})$ を対応させることによって, 与えられたプロファイル R に対する Kemeny 順序を求める問題は, 以下の整数計画問題 (7) と等価である.

$$\left|\begin{array}{lll} \max & \sum_{s \neq t} V_{st}(R) x_{st} & \\ \text{s.t} & x_{st} + x_{ts} = 1 & (\{s,t\} \in \binom{X}{2}), \\ & x_{st} + x_{tu} + x_{us} \leq 2 & (\{s,t,u\} \in \binom{X}{3}), \\ & x_{st} \in \{0,1\} & (s, t \in X, x \neq y) \end{array}\right. \tag{7}$$

この問題は線形順序付け問題 (cf. [3]) の特別な場合である. X の任意の 3 つ組 $\{s, t, u\}$ に対して, l_{stu} を

$$l_{stu} = |\{(s,t), (t,u), (u,s)\} \cap A(R)|$$

と定義する. Sukegawa 他 [4] は, $l_{stu} = 0$ であるような制約

$$x_{st} + x_{tu} + x_{us} \leq 2 \tag{8}$$

は問題 (7) において冗長であることを示した. 定理 3.3 より, 我々は Sukegawa 他 [4] が示したものとは別のタイプの冗長制約を示すことができる.

系 4.1 X の任意の 3 つ組 $\{s, t, u\}$ に対して, もし s と t が $G^+(R)$ の異なる強連結成分の点であり, かつ, $(t, s) \in A^+(R)$ ならば, 制約 (8) は問題 (7) において冗長である.

5. おわりに

本研究では, Truchon [5] によって導入された拡張 Condorcet 規準よりも強い条件である強 Condorcet 規準を導入し, Kemeny ルールがこれを満たすことを示した. この結果を用いることによって, Kemeny 順序を求める問題を定式化する整数計画問題における冗長制約の新しいクラスを導いた. 冗長制約の除去による計算時間に対する影響を数値実験によって検証すること, 及び, 系 4.1 で与えたものより広い冗長制約のクラスを導くことは今後の研究課題である.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 18K11180 の助成を受けたものである.

参考文献

[1] J. Bartholdi, C. Tovey and M. Trick: The computational difficulty of manipulating an election. *Social Choice and Welfare* **6** (1989) 227–241.

[2] R. Martí and G. Reinelt: *The Linear Ordering Problem: Exact and Heuristic Methods in Combinatorial Optimization* (Springer, 2011).

[3] 櫻庭・柳浦: 線形順序付け問題の解法. オペレーションズ・リサーチ **57** (2012) 327–334.

[4] N. Sukegawa and S. Mizuno: Redundancy of the transitivity constraints in the ordering problem. Technical Report, No. 2014-2, Department of Industrial Engineering and Management, Tokyo Institute of Technology, February 2014.

[5] M. Truchon: An extension of the Condorcet criterion and Kemeny orders. Technical Report, cahier 98-15 du Centre de Recherche en Économie et Finance Appliquées, Université Laval, Québec, Candada, October 1998.