日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 秋季研究発表会

並列型近接点法による準非拡大写像の不動点集合上での非平滑凸最適化

明治大学大学院　*清水健吾　SHIMIZU Kengo
01016200　明治大学　飯塚秀明　IIDUKA Hideaki

1.　はじめに

この発表では、実 Hilbert 空間において準非拡大写像の不動点集合の共通部分上で、非平滑な凸関数の和を最小にする問題 [1] を考える。制約集合への距離射影の明示的形式が常に知られているとは限らない。不動点制約を伴う最適化問題は、そのような複雑な制約付き最適化問題の議論を可能にする。

文献 [2] では、実 Hilbert 空間において非拡大写像の不動点集合の共通部分上で、非平滑な凸関数の和を最小にする問題を近接点法を用いて収束解析をしている。また、文献 [1] では、実 Hilbert 空間において準非拡大写像の不動点集合の共通部分上で、非平滑な凸関数の和を最小にする問題を並列型劣勾配法を用いて収束解析をしている。

本研究では、実 Hilbert 空間において準非拡大写像の不動点集合の共通部分上で、非平滑な凸関数の和を最小にする問題を解くための並列型近接点法の収束性について議論する。並列型近接点法は、勾配のリプシッツ連続性の仮定が不要になる。

2.　最適化問題と数学的準備

以降では、H を実 Hilbert 空間とする。H 上の恒等写像は Id で表され、$\mathrm{Id}(x) := x \ (x \in H)$ とする。写像 Q の不動点集合を、$\mathrm{Fix}(Q) := \{x \in H : Q(x) = x\}$ とする。このとき、任意の $x \in H$ と任意の $y \in \mathrm{Fix}(Q)$ に対して、$\|Q(x) - y\| \leq \|x - y\|$ が成り立つとき、Q を準非拡大写像と呼ぶ。ただし、$\|\cdot\|$ は H のノルムとする。Q が準堅非拡大であるとは、任意の $x \in H$ と任意の $y \in \mathrm{Fix}(Q)$ に対して、$\|Q(x) - y\|^2 + \|(\mathrm{Id} - Q)(x)\|^2 \leq \|x - y\|^2$ が成り立つときである。凸関数 f の $x \in H$ での近接点は、

$$\mathrm{Prox}_f(x) := \underset{y \in H}{\operatorname{argmin}} \left[f(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \right] \ (x \in H)$$

とする。

以降で扱う最適化問題について、次の問題 (1) として定式化する。

$$\begin{aligned} &\text{目的関数：} \quad f(x) := \sum_{i=1}^{I} f^{(i)}(x) \to \text{最小}, \\ &\text{制約条件：} \quad x \in \bigcap_{i \in I} \mathrm{Fix}\left(Q^{(i)}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、それぞれの目的関数 $f^{(i)} : H \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \cdots, I)$ は、連続な凸関数であり、$Q^{(i)} : H \to H$ は準堅非拡大である。

3.　提案アルゴリズム

提案アルゴリズムを、アルゴリズム 1 に示す。2 行目の計算は、それぞれの i について独立しているため、並列的に計算することができる。既存の並列型劣勾配法に対して変更を行った箇所が 3 行目で、並列型近接点法を用いている。ただし、$Q_\alpha^{(i)} := \alpha^{(i)}\mathrm{Id} + (1 - \alpha^{(i)})Q^{(i)} \left(\alpha^{(i)} \in (0, 1)\right)$ とする。ステップ幅 λ_n $(n \in \mathbb{N})$ を適切に設定することで、問題 (1) のあるひとつの最小解へ弱収束することを証明できる。最小解への弱収束性を保証するための具体的な条件については、次章で述べる。

Algorithm 1

Require: $\forall i \ (i \in I), \alpha^{(i)}, (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty), x_0 \in H$.

```
1: loop
2:     for i = 1, 2, ..., I do
3:         x_n^(i) := Prox_{λ_n f^(i)} ( Q_α^(i)(x_n) ).
4:     end for
5:     x_{n+1} = (1/I) Σ_{i∈I} x_n^(i).
6:     n ← n + 1
7: end loop
```

4.　収束解析と実験的検証

ここでは、ステップ幅を十分小さな定数値に設定し近似解を求める定数ステップ幅と、0 に収束す

るステップ幅を取ることで生成点列の最小解への弱収束性を保証する減少ステップ幅の 2 種類のステップ幅について考察する。定理 1 は定数ステップ幅を用いた場合の Algorithm 1 の近似性能を示すものであり、定理 2 は減少ステップ幅を用いた場合の Algorithm 1 の収束性を保証する定理である。問題 (1) について、以下の 2 パターンのステップ幅での収束性と数値実験により解いた結果を示す。

(i) 定理 1

　ステップ幅は一定 ($\lambda_n = \lambda$) の場合。

(ii) 定理 2

　ステップ幅が 0 に収束 ($\lambda_n \to 0$) する場合。

以上これら 2 つの定理の詳細な仮定および条件と、そこから導かれる結果については発表において議論する。

参考文献

[1] Iiduka, Hideaki. "Convergence analysis of iterative methods for nonsmooth convex optimization over fixed point sets of quasi-nonexpansive mappings." Mathematical Programming 159.1-2 (2016): 509-538.

[2] Iiduka, Hideaki. "Proximal point algorithms for nonsmooth convex optimization with fixed point constraints." European Journal of Operational Research 253.2 (2016): 503-513.