日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 秋季研究発表会

不動点準凸準劣勾配法の収束率について

05000436　明治大学大学院 *　*菱沼 和弘　HISHINUMA Kazuhiro
01016200　明治大学　飯塚 秀明　IIDUKA Hideaki

1. はじめに

不動点準凸準劣勾配法 [3, 4] は、難解複雑な制約を伴う非平滑準凸最適化問題を解くアルゴリズムである。非平滑準凸最適化問題を解く既存手法たる準劣勾配法 [2] は、制約集合への距離射影が容易に計算可能でなければ適用することができない。一方、不動点準凸準劣勾配法は、制約集合を不動点集合とするような非拡大写像のみが与えられればよい。従って不動点準凸準劣勾配法は、既存のアルゴリズムでは解くことが難しい複雑な制約を伴う非平滑準凸最適化問題をも取り扱うことが可能である。

本発表では、この不動点準凸準劣勾配法の収束率について議論する。

2. 不動点準凸準劣勾配法

H を実 Hilbert 空間とし、f を H 上の連続な準凸汎関数である、すなわち $f: H \to \mathbb{R}$ な連続関数であって、任意の $x, y \in H$ および任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して $f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ が常に成り立つもの、とする。加えて、X, D を H の空でない閉凸集合とする。このとき、次の最適化問題を解くことを考える。

$$\begin{array}{ll} \text{求む:} & f(x) \to \text{最小} \\ \text{制約:} & x \in X \cap D. \end{array} \tag{1}$$

ここで、不動点集合 $\mathrm{Fix}(T) := \{x \in H : T(x) = x\}$ が集合 X と一致するような堅非拡大[1]写像 $T: H \to H$ が存在するとし、また集合 D への距離射影 $P_D: H \to H$ が容易に計算できるものとする。また、制約集合 $X \cap D$ は空でないものとする。

問題 (1) を解く既存手法として、アルゴリズム 1 が提案されている [3, 4]。このアルゴリズムは、準凸最適化問題を解くための準凸準劣勾配法 [2] に、不動点近似アルゴリズムである Krasnosel'skiĭ-Mann アルゴリズム [6, 7] を合わせたものである。ここで、アルゴリズムに与えるパラメータは、ステップ幅 $\{v_k\}$ および Krasnosel'skiĭ-Mann アルゴリズムへの係数 $\{\alpha_k\}$ の 2 つであり、$\partial^\star f(x)$ は $x \in H$ における関数 f のレベルセット $\mathrm{lev}_{<f(x)} f := \{u \in H : f(u) < f(x)\}$ への法線錘 $\partial^\star f(x) := \{g \in H : \langle g, y - x\rangle \leq 0 \ (y \in \mathrm{lev}_{<f(x)} f)\}$ である。発表においては、$\partial^\star f(x)$ を劣微分と呼び、その元 (のうち、ノルムが 1 のもの) を劣勾配と呼ぶ。

アルゴリズム 1 不動点準凸準劣勾配法 [3, 4]

Require:
$\{v_k\} \subset (0, \infty)$, $\{\alpha_k\} \subset (0, 1]$.

1: $x_1 \in D$.
2: **for** $k = 1, 2, \ldots$ **do**
3: $\quad g_k \in \partial^\star f(x_k) \cap \{x \in H : \|x\| = 1\}$.
4: $\quad x_{k+1} := P_D(\alpha_k x_k + (1 - \alpha_k) T(x_k - v_k g_k))$.
5: **end for**

既存の研究 [3, 4] において、

1. 問題 1 は最適解を有すること。
2. 生成点列各点において Hölder 条件 [5, Definition 1] を満たすこと
3. 生成点列 $\{x_k\}$ が有界なこと

を満たし、かつ $0 < \liminf_{k\to\infty\alpha_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \alpha_k < 1$ および $\lim_{k\to\infty} v_k = 0$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \infty$ を満たすような $\{\alpha_k\}, \{v_k\}$ を与えたとき、アルゴリズム 1 による生成点列 $\{x_k\}$ は問題 1 の最適解へ弱収束する部分列をもつことが示されている。

本発表では、この収束解析をさらに精査し、アルゴリズム 1 の収束率について議論する。

3. 収束率解析

アルゴリズム 1 の、目的関数に関する収束率を命題 1 に示す。

命題 1 (目的関数値に関する収束率) $\{x_k\}$ をアルゴリズム *1* による生成点列とし、*2* 章で述べ

---

*独立行政法人日本学術振興会特別研究員ＤＣ

[1] 写像 T が堅非拡大であるとは、任意の $x, y \in H$ に対して $\|T(x) - T(y)\|^2 + \|(\mathrm{Id} - T)x - (\mathrm{Id} - y)\|^2 \leq \|x - y\|$ が常に成り立つことをいう。

た弱収束部分列存在のための条件をすべて満たすとする。全空間 H が N 次元 *Euclid* 空間、すなわち $H=\mathbb{R}^N$ であるとし、ある正数 $c>0$ について $v_k := c/k$ $(k\in\mathbb{N})$ をステップ幅としてアルゴリズム *1* に与えたとする。このとき、

$$f(x_k^\star) - f_\star = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(k+1))^\beta}\right)$$

が成り立つ。ただし、β は *Hölder* 条件 *[5, Definition 1]* の指数である。

距離射影を直接用いたアルゴリズム [2] と異なり、アルゴリズム 1 はその生成点列各点が制約集合に属することは保証されない。しかしながら、制約集合への近似度 $\|x_k - T(x_k)\|$ についてはその収束率を提示することが可能である。これを、次の命題 2 に示す。

命題 2 (制約近似度に関する収束率) $\{x_k\}$ をアルゴリズム *1* による生成点列とし、*2* 章で述べた弱収束部分列存在のための条件をすべて満たすとする。このとき、すべての k について $\inf_{x\in X\cap D} f(x) < f(x_k)$ であるならば、

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\|x_j - T(x_j)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log(k+1))^\beta}\right)$$

が成り立つ。

収束率解析の最後に、アルゴリズム 1 が解へ有限回の反復で到達するための十分条件を命題 3 に示す。

命題 3 (有限回収束性) $\{x_k\}$ をアルゴリズム *1* による生成点列とし、*2* 章で述べた弱収束部分列存在のための条件をすべて満たすとする。さらに、最適解集合 $X^\star := \{x^\star \in X\cap D : f(x) = \inf_{y\in X\cap D} f(y)\}$ の内部が空でなく、また生成点列 $\{x_k\}$ の各点が $\mathrm{Fix}(T)$ にすべて属するとする。このとき、$x_k \in X^\star$ たる $k\in\mathbb{N}$ が存在する。

ここで、最適解集合 $X^\star$ の内部が空でないという仮定は多くの応用に現れることが知られている [1]。また、生成点列 $\{x_k\}$ の各点が $\mathrm{Fix}(T)$ にすべて属するという仮定を満たす堅非拡大写像の例は、制約集合への距離射影である。しかしながら、ここでの仮定は距離射影に限定せず、与えられた点を堅非拡大写像の (最も近いとは限らない) 不動点に移すような写像であれば十分である。そのような写像が得られた際には、アルゴリズムを実行する前に一度その写像を用いて初期点 x_1 を不動点集合上にさえ移しておけば、その凸性から以降の生成点列は必ず不動点集合に属する。そのような場合において、命題 3 は適用することが可能であり、アルゴリズム 1 を用いて有限回の反復によって最適解を得ることができる。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP17J09220 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] Y. Hu, X. Yang, C.-K. Sim: *Inexact subgradient methods for quasi-convex optimization problems*, European Journal of Operational Research 240(2) 315–327 (2015).

[2] K. C. Kiwiel: *Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization*, Mathematical Programming 90(1): 1–25 (2001).

[3] K. Hishinuma, H. Iiduka: *Convergence property, computational performance, and usability of fixed point quasiconvex subgradient method*, the 6th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (2018; oral).

[4] K. Hishinuma, H. Iiduka: *Fixed Point Quasiconvex Subgradient Method*, arXiv:1811.06708 (URL: `https://arxiv.org/abs/1811.06708`, 2018; preprint).

[5] I. V. Konnov: *On convergence properties of a subgradient method*, Optimization Methods and Software 18(1): 53–62 (2003).

[6] M. A. Krasnosel'skiĭ: *Two remarks on the method of successive approximations*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk 10(1(63)): 123–127 (1955).

[7] W. R. Mann: *Mean value methods in iteration*, Proceedings of the American Mathematical Society 4: 506–510 (1953).