日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 秋季研究発表会

A Structure of a G-star-shaped Life Distribution Function

01006143　名古屋工業大学　大鑄 史男　OHI Fumio

1. Introduction

Definition 1.1 寿命分布関数 F は，狭義単調増加で連続な寿命分布関数 G に関して $G^{-1} \circ F(t)/t \uparrow_{t \in [0,\infty)}$ である時，G-star-shaped であると言う．

本項では，IFRA の拡張でもある G-star-shaped の寿命分布関数の構成について述べる．F が G-star-shaped である時，$0 < s < t$ に対して $G^{-1} \circ F(s)/s \leqq G^{-1} \circ F(t)/t$ であるから，$\alpha = s/t$ と置いて，$G^{-1} \circ F(\alpha t) \leqq \alpha\, G^{-1} \circ F(t)$ である．従って，G-star-shaped は $G^{-1} \circ F(\alpha t) \leqq \alpha\, G^{-1} \circ F(t)$ $(0 < \forall \alpha < 1)$ と同値である．

2. IFRA の場合

$G(t) = 1 - e^{-t}$ の場合，$G^{-1}(y) = -\log(1-y)$ であり，よって

$$G^{-1} \circ F(t) = -\log(1 - F(t)) = -\log \overline{F}(t)$$

である．この G について G-star-shaped であることは，$-\frac{1}{t} \log \overline{F}(t)$ が t について単調増加であり，F は IFRA である．また，定義の単調性と同値な条件が，次の IFRA についてよく知られている不等号関係である．

$$0 < \forall \alpha \leqq 1, \quad \overline{F}(\alpha t) \geqq \left\{ \overline{F}(t) \right\}^{\alpha}.$$

IFRA 分布が G-star-shaped $(\overline{G}(t) = e^{-t})$ であることから，IFRA 分布関数の構成が明らかになり，次の Theorem 2.1 が成立する．Barlow and Proschan (1975) を参照して頂きたい．

Theorem 2.1 IFRA 分布は指数分布または退化分布に従う部品からなるコヒーレントシステム（より厳密には，直並列システム）の寿命分布の分布収束によって得られる．つまり $\{\text{IFRA}\} \subsetneqq \{\exp,\ \deg\}^{CS,LD}$. である．

信頼度関数 h に対して

$$0 < \forall \alpha < 1, \quad h(\boldsymbol{p}^{\alpha}) \geqq \{h(\boldsymbol{p})\}^{\alpha} \tag{1}$$

であるから，部品 i の信頼度関数を $\overline{F}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$，確率的に独立であるとし，システムの信頼度関数を $\overline{F}$ とすると，$\overline{\boldsymbol{F}} = \left(\overline{F}_1, \cdots, \overline{F}_n\right)$ と置いて，

$$\left\{ \overline{F}(t) \right\}^{\alpha} = \left\{ h\left(\overline{\boldsymbol{F}}(t)\right) \right\}^{\alpha} \leqq h\left(\left\{ \overline{\boldsymbol{F}}(t) \right\}^{\alpha} \right) \leqq h\left(\overline{\boldsymbol{F}}(\alpha t) \right) = \overline{F}(\alpha t).$$

一番目の不等号関係は，信頼度関数 h の性質から，二番目の不等号関係は h の単調増加性と F_i $(i = 1, \cdots, n)$ が IFRA であることから成立する．IFRA 性は単調システムを構成する操作について閉じていることが分かる．

まず Theorem 2.1 を G を指数分布に制限せずに Definition 1.1 の一般的な範疇で証明する．

3. G-star-shaped distribution の構成

life distribution F を G-star-shaped であるとする．

$$0 \leqq \mu_0 \leqq \lim_{t \to 0} G^{-1} \circ F(t)/t, \qquad 0 \leqq \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots \to \infty \tag{2}$$

として，$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots \to \infty$ を次のように定義する．

$$t_i = \inf \left\{ \ t \ \middle| \ G^{-1} \circ F(t)/t \geqq \mu_i \right\}.$$

$\{\ \}$ 内が空であれば，$t_i = \infty$ とする．定義 1.1 の単調増加性から次の不等号関係が成立する．

$$t \in [t_{i-1}, t_i), \quad \mu_{i-1} \leqq G^{-1} \circ F(t)/t < \mu_i, \ \text{equivalently,} \ \overline{G}(\mu_{i-1} t) \geqq \overline{F}(t) > \overline{G}(\mu_i t). \tag{3}$$

G のスケール族 (G-scale family) とは，寿命分布関数の族 $\mathcal{G} = \{\ G(\lambda t) \mid \lambda \geqq 0\ \}$ のことである．(3) は，G-star-shaped 寿命分布関数 F が，$\mathcal{G}$ のメンバー（G-scale distribution）によって区分的に近似されることを意味する．(2) の系列 $\mu_0, \mu_1, \cdots$ を $\boldsymbol{\mu}$，μ_0 から μ_n までの有限列を $\boldsymbol{\mu}_n$ と書き，二種類の分布関数を以下に定義する．

$$\overline{H}_{\boldsymbol{\mu}}(t) \ = \ \overline{G}(\mu_{i-1} t), \ t \in [t_{i-1}, t_i), \qquad \overline{H}_{\boldsymbol{\mu}_n}(t) \ = \ \begin{cases} \overline{G}(\mu_{i-1} t), & t \in [t_{i-1}, t_i), \ i = 1, 2, \cdots, n+1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

n を十分大に取り，$\overline{H}_{\boldsymbol{\mu}_n}$ は $\overline{H}_{\boldsymbol{\mu}}$ を一様に近似し，$\sup_i\{\mu_i - \mu_{i-1}\} \to 0$ として，$\overline{H}_{\boldsymbol{\mu}}$ は $\overline{F}$ を一様に近似する．従って，$\overline{H}_{\boldsymbol{\mu}_n}$ の形の寿命分布の列によって $\overline{F}$ に一様に分布収束させることが出来る．

$\beta \geqq 1$ に対して，G は次の条件を満たすとする．

$$\frac{\overline{G}(\beta t)}{\overline{G}(t)} \text{ is decreasing in } t \text{ and } \lim_{t\to\infty} \frac{\overline{G}(\beta t)}{\overline{G}(t)} = 0. \tag{4}$$

Remark 3.1 G が IFR の時，$0 < t_1 < t_2$ に対して，

$$\frac{\overline{G}(\beta t_1)}{\overline{G}(t_1)} = \frac{\overline{G}((\beta-1)t_1+t_1)}{\overline{G}(t_1)} \geqq \frac{\overline{G}((\beta-1)t_1+t_2)}{\overline{G}(t_2)} \geqq \frac{\overline{G}((\beta-1)t_2+t_2)}{\overline{G}(t_2)} = \frac{\overline{G}(\beta t_2)}{\overline{G}(t_2)}.$$

一番目の不等号関係は，$(\beta-1)t_1 > 0$ であることと G が IFR であることから成立する．二番目の不等号関係は，$t_1 < t_2$ から $(\beta-1)t_1 < (\beta-1)t_2$ であり，よって，$\overline{G}$ の単調減少性より $\overline{G}((\beta-1)t_1+t_2) \geqq \overline{G}((\beta-1)t_2+t_2)$ である．よって，G が IFR である時，(4) の単調減少性は成立し，さらに PF_2 density の場合も成立する．ロピタルの定理より，G が密度関数 g を持つとき，$\lim_{t\to\infty} \overline{G}(\beta t)/\overline{G}(t) = \lim_{t\to\infty} \beta \cdot g(\beta t)/g(t)$. 従って，応用上重要な寿命分布関数に対しては，密度関数について上記の極限を吟味すれば良い．例えば，アーラン分布の場合

$$g(t) = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda t}, \quad \frac{g(\beta t)}{g(t)} = \left(\frac{\lambda\beta t}{\lambda t}\right)^{k-1} \cdot e^{-\lambda\beta t+\lambda t} = (\beta)^{k-1} \exp\{-(\beta-1)\lambda t\} \to 0 \quad (t \to \infty).$$

さらにワイブル分布の場合は，$m \geqq 1$ の時，

$$g(t) = \lambda m t^{m-1} e^{-\lambda t^m}, \quad \frac{g(\beta t)}{g(t)} = \frac{(\beta t)^{m-1}}{t^{m-1}} \exp\{-\lambda(\beta t)^m + \lambda t^m\} = \beta^{m-1} \exp\{-(\beta^m - 1)\lambda t^m\} \to 0 \quad (t \to \infty).$$

(4) の条件を満たすとき，さらに次の事が成立する．$0 < \alpha < \beta$ に対して，

$$\frac{\overline{G}(\beta t)}{\overline{G}(\alpha t)} \text{ is decreasing in } t \text{ and } \lim_{t\to\infty} \frac{\overline{G}(\beta t)}{\overline{G}(\alpha t)} = 0. \tag{5}$$

従って，$\overline{G}(\beta t)/\overline{G}(\alpha t)$ を残存寿命分布関数であると考えて良い．

Fig.1 の直並列システムの残存寿命分布関数は，$\overline{H}_{\boldsymbol{\mu}_n}$ である．従って，次の Theorem 3.1 が成立する．

Theorem 3.1 (5) の条件の下で，$\{G\text{-star-shaped distribution functions}\} \subsetneqq \{\overline{\mathcal{G}},\ deg\}^{CS,\ LD}$. ここで，$\overline{\mathcal{G}}$ は，$\mathcal{G}$ の寿命分布の商によって定められる残存寿命分布関数の族である．

Example 3.1 G が指数分布である時，明らかに $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}}$ である．$G = 1 - e^{-t^m}$ のとき，$\overline{G}(t) = e^{-t^m}$ であるから，$\overline{G}(\beta t)/\overline{G}(\alpha t) = \exp\{-(\beta t)^m\}/\exp\{-(\alpha t)^m\} = \exp\{-\left((\beta^m - \alpha^m)^{1/m} t\right)^m\}$ であり，$\mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}}$ が成立する．ちなみに，$\mathcal{G}$ は全ての $\lambda \geqq 0$ と $m \geqq 1$ のワイブル分布の族である．

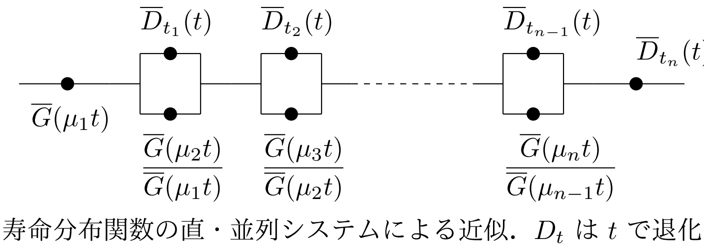

Figure 1: G-star-shaped 寿命分布関数の直・並列システムによる近似．D_t は t で退化した寿命分布関数であり，$\overline{D}_t = 1 - D_t$ である．

参考文献

[1] R.E. Barlow and F. Proschan, "Statistical Theory of Reliability and Life Testing", Holt, Reihart and Winston, Inc., 1975.

[2] Henry W. Block and Thomas H. Savits, "Systems with exponential life and IFRA component", The Annals of Statistics, 1979, Vol.7, No.4, 911-916.