日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 秋季研究発表会

２種類の損傷をもつ独立損傷モデルの取替方策

02602443　愛知工業大学　*水谷聡志　MIZUTANI Satoshi
01400043　愛知工業大学　中川覃夫　NAKAGAWA Toshio

1.　はじめに

本研究では，故障分布にしたがってに発生する衝撃が故障レベルを超えたならば故障が発生する独立損傷モデル [1, 2] において，衝撃量に故障が発生する水準と何回かそれを超えた衝撃が発生したならば取替を実施する水準を考慮したモデルを検討する．損傷量は独立で同一の確率分布に従い，その累積起こらない．すなわち，ユニットの経年劣化による取替基準として自然災害など強い衝撃を複数回経験したならばユニットの取替を実施するモデルを考える．

ユニットは独立な損傷量が K を超えたとき，K を超えないが $Z(K > Z)$ を超える損傷が M 回発生したとき，または時刻 T のいずれかが最も早く発生した時刻で取替を実施する．このモデルについて，単位時間当りの期待費用を導出する．さらに，$M = 1$ であり，(i) $c_K = c_Z > c_T$, (ii) $c_K > c_Z = c_T$ について，期待費用を最小にする最適な T^* について解析的に議論する．

2.　仮定

本研究におけるモデルの仮定を以下に挙げる．

(i) 衝撃が連続的に発生する環境を考え，X_j を $j-1$ 回目の衝撃と j 回目 $(j = 1, 2, \dots)$ の衝撃の時間間隔を表す確率変数とするとき，X_j は独立で同一な確率分布 $F(t) \equiv \Pr\{X_j \le t\}$ に従う．ここで $X_0 \equiv 0$．また，$F(t)$ は有限な平均 $\mu \equiv \int_0^\infty \overline{F}(t)\mathrm{d}t$ をもつ．さらに，$F(t)$ の j 重スチルチェス畳み込みを $F^{(j)}(t) \equiv \Pr\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \le t\}$ $(j = 1, 2, \dots)$, $G^{(0)}(t) \equiv 1$ $(t \ge 0)$ とする．

(ii) Y_j $(j = 1, 2, \dots)$ を j 回目の衝撃による損傷量を表す確率変数とするとき，各損傷量は独立で同一の確率分布 $G(x) \equiv \Pr\{Y_j \le x\}$ に従う．ここで $Y_0 \equiv 0$．また，$G(x)$ は有限な平均 $1/\theta \equiv \int_0^\infty \overline{G}(x)\mathrm{d}x$ をもつ．

(iii) ユニットは独立な損傷量が K を超えたとき，K は超えないが $Z(K > Z)$ を超える損傷が M 回発生したとき，または時刻 T のいずれかが最も早く発生した時刻で取替を実施する．

3.　モデル化

損傷量が K を超える衝撃が発生して取替える確率は

$$\overline{G}(K)\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=i}^{\infty}\binom{j}{i}G(Z)^{j-i} \times [G(K)-G(Z)]^i F^{(j+1)}(T),$$

時刻 T で取替える確率は

$$\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=i}^{\infty}\binom{j}{i}G(Z)^{j-i}[G(K)-G(Z)]^i \times [F^{(j)}(T)-F^{(j+1)}(T)],$$

Z を超える損傷が M 回発生したとき取替える確率は

$$\sum_{j=M-1}^{\infty}\binom{j}{M-1}G(Z)^{j+1-M} \times [G(K)-G(Z)]^M F^{(j+1)}(T),$$

よって，取替を実施するまでの平均時間は

$$T\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=i}^{\infty}\binom{j}{i}G(Z)^{j-i}[G(K)-G(Z)]^i \times [F^{(j)}(T)-F^{(j+1)}(T)] + \sum_{j=M-1}^{\infty}\binom{j}{M-1} \times G(Z)^{j+1-M}[G(K)-G(Z)]^M\int_0^T t\mathrm{d}F^{(j+1)}(t) + \overline{G}(K)\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=i}^{\infty}\binom{j}{i}G(Z)^{j-i} \times [G(K)-G(Z)]^i\int_0^T t\mathrm{d}F^{(j+1)}(t)$$

$$= \sum_{j=M-1}^{\infty}\binom{j}{M-1}G(Z)^{j+1-M}[G(K)-G(Z)]^M \times \int_0^T [1-F^{(j+1)}(t)]\mathrm{d}t$$

$$+\overline{G}(K)\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=i}^{\infty}\binom{j}{i}G(Z)^{j-i}$$
$$\times[G(K)-G(Z)]^i\int_0^T[1-F^{(j+1)}(t)]\mathrm{d}t. \quad (1)$$

それゆえ，単位時間当りの期待費用は

$$C(T)=\frac{\begin{array}{l}c_T+(c_Z-c_T)\sum_{j=M-1}^{\infty}\binom{j}{M-1}G(Z)^{j+1-M}\\ \quad\times[G(K)-G(Z)]^M F^{(j+1)}(T)\\ \quad+(c_K-c_T)\overline{G}(K)\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=i}^{\infty}\binom{j}{i}G(Z)^{j-i}\\ \quad\times[G(K)-G(Z)]^i F^{(j+1)}(T)\end{array}}{\begin{array}{l}\sum_{j=M-1}^{\infty}\binom{j}{M-1}G(Z)^{j+1-M}[G(K)-G(Z)]^M\\ \times\int_0^T[1-F^{(j+1)}(t)]\mathrm{d}t\\ +\overline{G}(K)\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=i}^{\infty}\binom{j}{i}G(Z)^{j-i}\\ \times[G(K)-G(Z)]^i\int_0^T[1-F^{(j+1)}(t)]\mathrm{d}t\end{array}}. \quad (2)$$

ここで $c_Z =$ 損傷量が M 回 Z を超えて取替える費用, $c_T =$ 時刻 T で取替える費用，$c_K =$ 損傷量が K を超えて取替える費用 $(c_K \geq c_Z \geq c_T)$.

3.1. 特殊な場合

(i) $M=1$, $c_K=c_Z>c_T$ である場合

単位時間当りの期待費用は

$$C(T)=\frac{c_T+(c_K-c_T)\overline{G}(Z)\sum_{j=0}^{\infty}G(Z)^jF^{(j+1)}(T)}{\overline{G}(Z)\sum_{j=0}^{\infty}G(Z)^j\int_0^T[1-F^{(j+1)}(t)]\mathrm{d}t}. \quad (3)$$

$C(T)$ を最小にする最適な T^* を求めるため，$C(T)$ を T で微分して 0 とおくと

$$Q(T)\sum_{j=0}^{\infty}G(Z)^j\int_0^T[1-F^{(j+1)}(t)]\mathrm{d}t$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty}G(Z)^jF^{(j+1)}(T)=\frac{1}{\overline{G}(Z)}\frac{c_T}{c_K-c_T}, \quad (4)$$

ここで

$$Q(T)\equiv\frac{\sum_{j=0}^{\infty}G(Z)^jf^{(j+1)}(T)}{\sum_{j=0}^{\infty}G(Z)^j[1-F^{(j+1)}(T)]}.$$

もし $Q(T)$ が T に関して $Q(\infty)$ に単調増加するならば，このとき (4) 式を満たす有限で唯一の最適な T^* $(0<T^*<\infty)$ が存在する．そのときの期待費用は

$$C(T^*)=(c_K-c_T)Q(T^*). \quad (5)$$

とくに $F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$ の場合は，$Q(T)=\lambda\overline{G}(Z)$ と定数になり，$T^*=\infty$ である．

(ii) $M=1$, $c_K>c_Z=c_T$ である場合

単位時間当りの期待費用は

$$C(T)=\frac{c_T+(c_K-c_T)\overline{G}(K)\sum_{j=0}^{\infty}G(Z)^jF^{(j+1)}(T)}{\overline{G}(Z)\sum_{j=0}^{\infty}G(Z)^j\int_0^T[1-F^{(j+1)}(t)]\mathrm{d}t}. \quad (6)$$

$C(T)$ を最小にする最適な T^* を求めるため，$C(T)$ を T で微分して 0 とおくと

$$Q(T)\sum_{j=0}^{\infty}G(Z)^j\int_0^T[1-F^{(j+1)}(t)]\mathrm{d}t$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty}G(Z)^jF^{(j+1)}(T)=\frac{1}{\overline{G}(K)}\frac{c_T}{c_K-c_T}. \quad (7)$$

この左辺は (4) 式の左辺と一致し，期待費用は

$$C(T^*)=(c_K-c_T)\frac{\overline{G}(K)}{\overline{G}(Z)}Q(T^*). \quad (8)$$

まとめ

本研究では，２種類の損傷をもつ独立損傷モデルについて期待費用を導出し，特殊な例について期待費用を最小にする T^* を解析的に議論した．今後の方針として，損傷量に関係なく N 回目の衝撃で取替える場合と組合せたモデル，強い衝撃で故障の水準が下がるモデルなどが考えられる．

謝辞

本研究の一部は，文部科学省科学研究費基金 (基盤研究 (C)) 課題番号 (18K01713)(2018-2020) の助成をうけたものである．

参考文献

[1] T. Nakagawa *Shock and Damage Models in Reliability Theory*, Springer-Verlag, London, 2006.

[2] Zhao and T. Nakagawa *Advanced Maintenance Policies for Shock and Damage Models*, Springer-Verlag, London, 2018.