DEA 効率値の分解と乗数制約
—五輪メダル獲得効率性評価への適用—

01206313　東京理科大学　*関谷 和之　SEKITANI Kazuyuki

1.　序論

DEA の効率性評価において経験，過去の情報，経営者の意見という先験情報を活用することは，評価結果の受け入れ易さという実用面で重要である．効率性評価における先験情報の活用は乗数制約として定式化して乗数形式 DEA モデルへ組み込むことで実現できる．

日本では 2020 年の東京オリンピックに向けて，2015 年にスポーツ庁を設立し，メダル獲得躍進に力を入れている．大会前には主要国のメダル獲得総数の予想が大手コンサルティング会社プライスウォーターハウスクーパース（ＰＷＣ） [1] から発表されて，新聞等 [2] のメディアに取り上げられる．

国別の五輪メダル獲得総数の予測では重回帰分析が用いられており，各国の国力として，人口と１人当り GDP を説明変数として主に用いる．重回帰分析の予測結果が北京以降の五輪おいてある程度十分な精度を持つことに注目して，国力に応じたメダル獲得の効率性を評価する DEA 研究 [4, 5, 6] が展開されている．重回帰分析では金，銀，銅のメダルそれぞれの価値を同一とするが，DEA のメダル獲得効率性評価では，金，銀，銅のメダルの価値の違いを乗数制約として扱うことができる．

本研究では，DEA のメダル獲得効率性評価に対して，国力に対する獲得したメダル総数の効率性を示す総メダル数効率性指数と獲得した全メダルに占める価値の高いメダルの割合を示す獲得メダル価値指数との２つの指標に分解可能な乗数制約法を提案する．提案する乗数制約法による DEA モデルは特殊な２段階 DEA として見なすことができる．

2.　メダル獲得効率性評価の DEA モデル

リオ五輪でのメダル獲得国は 87ヶ国であり，アルファベット順に番号を１から振る．$n = 87$ とする．第 j 番目の国を国 $_j$ と書く．国 $_j$ の人口を x_{1j}，１人当りＧＤＰを x_{2j}，金，銀，銅メダル数を y_{1j}, y_{2j}, y_{3j} とする．

国 $_k$ のメダル総数 $\sum_{r=1}^{3} y_{rk}$ は

$$\sum_{r=1}^{3} y_{rk} \approx \sum_{i=1}^{2} v_i x_{ik} + v_0 \tag{1}$$

であることを仮定する．

各国はその国力を使ってメダル獲得に向けて活動するものと考える．DEA 研究 [4, 5, 6] は国力を PWC の予測式で用いたその国の人口と１人当りＧＤＰの一次式で表現できること，さらに，金，銀，銅メダルの価値 u_1, u_2, u_3 の大小関係は一次不等式系で表現できることを仮定する．所与の正の P と Q に対して各国 $_k$ に対する乗数形式 DEA モデル

$$\begin{aligned}
\max. \quad & \frac{\sum_{r=1}^{3} u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{2} v_i x_{ik} + \nu} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{3} u_r y_{rj} - \left(\sum_{i=1}^{2} v_i x_{ij} + \nu \right) \le 0 \qquad (2)\\
& \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \\
& u_1 \ge P u_2 \\
& u_2 \ge Q u_3 \\
& u_r \ge 0 \quad (r = 1, 2, 3) \\
& v_i \ge 0 \quad (i = 1, 2)
\end{aligned}$$

を基本形として国別のメダル獲得効率性を分析する．ここで，$P(Q)$ は銀 (銅) メダルに対する金 (銀) メダルの価値の比の下限値である．

(1) に対する最小二乗法による推定値は $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_0)$ とし，

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{r=1}^{3} y_{rj} - \left(\sum_{i=1}^{2} \hat{v}_i x_{ij} + \hat{v}_0 \right) \right|$$

を a とする．ここで，人口と１人当りＧＤＰに対するウエイトの集合 V を

$$\left\{ (v_1, v_2) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{r=1}^{3} y_{rj} - \left(\sum_{i=1}^{2} v_i x_{ij} + v_0 \right) \right| \le a \right\} \tag{3}$$

とする．$(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in V$ である．また，(1) に対する最小絶対値法による推定値 $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_0)$ に対して $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in V$ である．つまり，国力の違いによるメダル総数の変化をうまく表現する人口と１人当りＧＤＰに対するウエイトが V に含まれている．そこで，$(v_1, v_2) \in V$ は国力の違いによるメダル総数の変化をうまく表現する人口と１人当りＧＤＰに対するウエイトであると仮定する．

問題 (2) に乗数制約 $(v_1, v_2) \in V$ と $\sum_{r=1}^{3} u_r = 3$ を追加した問題は

$$\begin{aligned}
\max. \quad & \frac{\sum_{r=1}^{3} u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{2} v_i x_{ik} + \nu} & (4)\\
\text{s.t.} \quad & \text{(2) の制約条件} & (5)\\
& (v_1, v_2) \in V & (6)\\
& \textstyle\sum_{r=1}^{3} u_r = 3 & (7)
\end{aligned}$$

である．本研究では，問題 (4)〜(7) を国 $_k$ のメダル獲

得効率性を評価するDEAモデルし，その最適値を国 $_k$ の効率値とする．効率値1であれば，国力に見合うような価値の高いメダルを獲得できたことを示し，効率値が1より小さくなればなるほど，獲得したメダル価値は国力の点からますます物足りないことを示す．

3. メダル獲得効率値の分解

メダル獲得効率性DEAモデル (4)〜(7) の最適解を $(v_1^*, v_2^*, \nu^*, u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ とすると，国 $_k$ の効率値では

$$\frac{\sum_{r=1}^{3} u_r^* y_{rk}}{\sum_{i=1}^{2} v_i^* x_{ik} + \nu^*} = \frac{\sum_{r=1}^{3} t y_{rk}}{\sum_{i=1}^{2} v_i^* x_{ik} + \nu^*} \cdot \frac{\sum_{r=1}^{3} u_r^* y_{rk}}{\sum_{r=1}^{3} t y_{rk}} \tag{8}$$

が任意の $t > 0$ で成立する．$\frac{\sum_{r=1}^{3} t y_{rk}}{\sum_{i=1}^{2} v_i^* x_{ik} + \nu^*}$ は国力に対する獲得メダル総数の比に比例し，$\frac{\sum_{r=1}^{3} u_r^* y_{rk}}{\sum_{r=1}^{3} t y_{rk}}$ は獲得メダルに占めるメダル価値の高さに比例する．したがって，$\frac{\sum_{r=1}^{3} t y_{rk}}{\sum_{i=1}^{2} v_i^* x_{ik} + \nu^*}$ を総メダル数効率性指数と呼び，$\frac{\sum_{r=1}^{3} u_r^* y_{rk}}{\sum_{r=1}^{3} t y_{rk}}$ を獲得メダル価値指数と呼ぶ．

制約式 (7) から，獲得メダル価値指数は上限は3であり，上限3であれば獲得したメダル全てが金である．獲得メダル価値指数が3に近ければ近いほど，価値の高いメダルを多く獲得したことになる．総メダル数効率性指数の値が高ければ高いほど，国力に相応しい総メダル枚数を獲得したことになる．

任意の $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\frac{\sum_{r=1}^{3} u_r^* y_{rj}}{\sum_{r=1}^{3} y_{rj}} \leq t \leq \frac{\sum_{i=1}^{2} v_i^* x_{ij} + \nu^*}{\sum_{r=1}^{3} y_{rj}}$$

が成立する t が存在すれば，国 $_j$ の中間財が $\sum_{r=1}^{3} y_{rj}$ であり，入力が (x_{1j}, x_{2j})，出力が (y_{1j}, y_{2j}, y_{3j}) であり，目的関数が (8) である乗数形式2段階DEA比率尺度モデル [3] としてメダル獲得効率性DEAモデル (4)〜(7) を見なすことができる．

4. 数値実験

2016年リオ五輪のメダル獲得国87ヶ国を対象にして $P = 2$ と $Q = 3/2$ として数値実験を行った．効率値が上位20カ国の分析結果を表1に示す．効率的であった5カ国はアメリカ，ロシア，ジャマイカ，イギリス，中国であった．アメリカ，ロシア，イギリス，中国は比較的豊かな国力を持つが，ジャマイカの国力は他の4カ国と比較すると低い．効率的な5カ国の中で，ジャマイカは獲得メダル総数の効率性において最低であるが，獲得メダル価値指数は最高である．

表1には，獲得メダル価値指数が平均値未満である国が13個存在する．つまり，獲得メダル総数が少数でもその多くが金メダルであるような国は表1には出現しないが，相当数存在することがわかる．

リオ五輪のロシアではメダル有望選手多数がドーピングにより欠場したため前回（ロンドン五輪）の成果から金5枚，銀7枚，銅13枚が減少した．それにも関わらず，リオ五輪のロシアは以前として効率的であった．このことから，前回大会以前のロシアは他の国々から見れば異様なほど効率的であったことが伺える．

表1: リオ五輪における効率値が上位20カ国の分析結果

国	メダル獲得効率値	総メダル数効率性指数	獲得メダル価値指数
China	1	0.979644	1.02078
Great Britain	1	0.927044	1.0787
Jamaica	1	0.611111	1.63636
Russian	1	0.996764	1.00325
United States	1	0.889638	1.12405
Kenya	0.873329	0.630737	1.38462
Hungary	0.851454	0.532158	1.6
Azerbaijan	0.819484	1.15076	0.712121
Uzbekistan	0.711998	0.771331	0.923077
Cuba	0.679467	0.622845	1.09091
Germany	0.629114	0.518094	1.21429
France	0.599447	0.650105	0.922078
Kazakhstan	0.598656	0.731691	0.818182
Croatia	0.588988	0.502238	1.17273
Georgia	0.531956	0.593632	0.896104
Serbia	0.525513	0.550537	0.954545
Japan	0.51403	0.55997	0.91796
NorthKorea	0.513732	0.527431	0.974026
Australia	0.512025	0.539062	0.949843
Italy	0.486838	0.499821	0.974026
87ヶ国平均	0.286317	0.279567	1.090533

5. 結論

パラメータ推定を利用した乗数制約と効率値分解を提案した．このテーマへの関心は高木英明先生 (筑波大名誉教授）との議論から生じた．ここに感謝したい．

参考文献

[1] https://www.pwc.com/jp/ja/press-room/benchmark-olympic-medals1606.html

[2] https://www.shinmai.co.jp/feature/2016olympic/newspack/article.php?id=2016061601001285

[3] 岡部，甲斐，嶋田，関谷,「乗数形式2段階DEA比率尺度モデルの改訂と動的DEAへの展開」, オペレーションズ・リサーチ, 63, 287-294, 2018.

[4] R. H. Morton, "Who won the Sydney 2000 Olympics?: an allometric approach." Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician) 51, 147-155, 2002.

[5] S. Lozano, G. Villa, F. Guerrero, P. Cortes, "Measuring the performance of nations at the Summer Olympics using data envelopment analysis," JORS, 53, 501-511, 2002.

[6] L. Yongjun, L. Liang, Y. Chen, H. Morita, "Models for measuring and benchmarking Olympics achievements", Omega, 36, 933-940, 2008.