日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 秋季研究発表会

完全二部グラフ上の探索問題

01105054 兵庫県立大学 菊田健作 KIKUTA Kensaku

1 はじめに

本報告は前回報告（文献 [3]）に引き続き，有限連結グラフ上の探索問題を扱う．静止探索目標物のノード上における存在確率が未知の場合，仮想的なプレーヤー（Hider）が目標物を意思を持って隠すと考え，探索者と Hider の間の２人ゼロ和ゲームを解くことによって，探索者の最適な行動を決定する，ということが考えられる．前回報告では，グリッドグラフ上での２人ゼロ和ゲームを扱った．今回は，完全二部グラフにおいて，静止探索目標物のノード上における存在確率が既知の場合に，探索者の最適意思決定を考察する．一般に，グラフがサイクルを含む場合は厳密解を求めるのが難しい．第２節以降では，完全二部グラフにおける最適解の解析状況について文献 [2] の内容を報告し今後の課題を述べる．本報告の探索問題全般の中での位置づけ等は文献 [1] を参照されたい．

2 モデル

ノード集合が $A \cup B \cup \{0\}$ である完全二部グラフを考える．0 以外のノードには 1 から $|A| + |B|$ まで番号が付されている．A はノード 0 と隣接するノードの集合である．図 1 は $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$ の場合を表している．

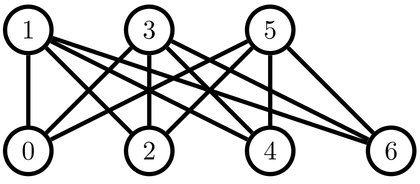

図 1：完全二部グラフ

0 以外のノードのどれか 1 つに静止探索目標物が隠されている．探索者はどれに隠されているかを知らない．ノード間の移動は辺に沿って行われる．目標物が存在するノードを調べたときそれを見逃す確率はどのノードについても 0 である．したがって、探索者が同一のノードを２度以上調べることはない．探索者は 0 以外のノードの探索順序 σ を決めた後ノード 0 から出発し，探索順序 σ に従ってノードを調べていく．ノード i を調べる順番が $\sigma(i)$ である．探索順序を $\sigma \equiv \sigma(1) \ldots \sigma(|A| + |B|)$ と表す．ノードを調べる費用は各ノード $i \neq 0$ について $c_i > 0$ である．調べないで通過するときは費用 0 である．例えば，図 1 において探索順序 $= 21 \cdots$ の時，探索者はノード 0 から出発し，ノード $1, 3, 5$ のいずれかを通過してノード 2 に到達する．この場合通過したノードの調査は後回しである．ノード i と j が隣接しているときはノード i から j への移動費用は $d(i, j) = 1$ である．ノード i と j が隣接していないとき，i と j を結ぶ路に関する移動費用はその路に属する辺の移動費用の和である．i と j を結ぶ路が複数個あるときは，各路に関する移動費用を考えその最小値を $d(i, j)$ とする．目標物がノード $i \neq 0$ にある時，探索者が i を調べた時点で探索は終了する．このときの探索費用を $f(i, \sigma)$ と表す．

$$f(i, \sigma) = \sum_{k=1}^{\sigma^{-1}(i)} \{d(\sigma(k-1), \sigma(k)) + c_{\sigma(k)}\} \quad (1)$$

となる．各 $i \neq 0$ に対し目標物がノード i に存在する確率 p_i は既知である．$p = \{p_i\}_{i \in A \cup B}$ とすると，探索者の期待探索費用は $f(p, \sigma) = \sum_{i \in A \cup B} p_i f(i, \sigma)$ となる．探索者が目標物を発見するまでの期待探索費用を最小にするような探索順序を見つけるということがここでの問題である．こ

れを $\mathcal{P}(A, B, p^{A\cup B}, c^{A\cup B})$ と表す．

3　動的計画法による接近

本節では，完全二部グラフの特徴を利用した解析を例を用いて説明する．図 1 において，探索者がノード 1 を調べて目標物がなかったとする．見逃し確率は 0 であるので以後ノード 1 を調べることはないし，またグラフの構造上，以後の探索においてノード 1 を通過する必要もない．そこで探索者は図 2 のような新たな完全二部グラフ上での問題に直面していると考えることもできる．探索者は $0' = 1$ から出発する．ノード $0'$ と隣接するノードの集合は $B = \{2, 4, 6\}$ であり，$A \setminus \{1\} = \{3, 5\}$ である．探索者が他ノード $2, 3, 4, 5, 6$ を最初に調べた場合にも同様のことが当てはまる．

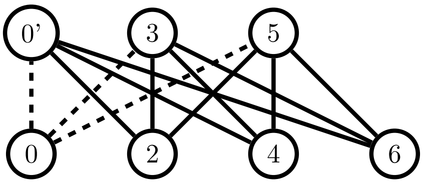

図 2：図 1 のグラフの部分グラフ

以上の議論を進めていくと最終的には図 3 のようなグラフに行き着く．ただし，ノード番号を適当に付け替えている．図 3 の探索費用は $1 + c_1$ である．

図 3：終端のグラフ

命題 問題 $\mathcal{P}(A, B, p^{A\cup B}, c^{A\cup B})$ の最適値関数 v は次の関係式を満たす．$B \neq \emptyset$ のとき

$$v(A, B, p^{A\cup B}, c^{A\cup B})$$
$$= \min \begin{cases} \min_{i\in A}\{1 + c_i + (1 - p_i)v(B, A \setminus \{i\}, \\ \quad \boldsymbol{p}^{B\cup(A\setminus\{i\})}, \quad \boldsymbol{c}^{B\cup(A\setminus\{i\})})\}, \\ \min_{i\in B}\{2 + c_i + (1 - p_i)v(A, B \setminus \{i\}, \\ \quad \boldsymbol{p}^{A\cup(B\setminus\{i\})}, \boldsymbol{c}^{A\cup(B\setminus\{i\})})\}. \end{cases}$$

$B = \emptyset$ のとき，グラフは木であり

$$v(A, \emptyset, \boldsymbol{p}^A, \boldsymbol{c}^A) = \min_{i\in A}\{1 + c_i + (1 - p_i) \times [1 + v(A \setminus \{i\}, \emptyset, +\boldsymbol{p}^{A\setminus\{i\}}, \boldsymbol{c}^{A\setminus\{i\}})]\}.$$

さらに，$v(\{1\}, \emptyset, \boldsymbol{p}^{\{1\}}, \boldsymbol{c}^{\{1\}}) = 1 + c_1$.

4　ノードの調査費用が同じ場合

集合 A, B のそれぞれに属するノードにおいて調査費用が同じの場合に第 3 節の議論を適用する．つまり，$c_i = a, \forall i \in A$ かつ $c_i = b, \forall i \in B$ とし，さらに，$p_i = 1/(\ell + m), \forall i \in A \cup B$ とする．ただし，$|A| = \ell, |B| = m$ とおく．問題は $\mathcal{P}(\ell a, mb)$ というように ℓ, m, a, b によって表される．例えば，$\mathcal{P}(3a, 3b)$ の最小期待探索費用は次のようになる．

$$\begin{aligned} a \geq b + 6 \Rightarrow E(246135) &= \frac{1}{6}(39 + 6a + 15b), \\ b + 6 \geq a \geq b + 3 \Rightarrow E(241635) &= \frac{1}{6}(33 + 7a + 14b), \\ b + 3 \geq a \geq b + 2 \Rightarrow E(214365) &= \frac{1}{6}(27 + 9a + 12b), \\ b + 2 \geq a \geq b - 3 \Rightarrow E(123456) &= \frac{1}{6}(21 + 12a + 9b), \\ b - 3 \geq a \geq b - 6 \Rightarrow E(132546) &= \frac{1}{6}(24 + 14a + 7b), \\ b - 6 \geq a \Rightarrow E(135246) &= \frac{1}{6}(33 + 15a + 6b), \end{aligned}$$

5　おわりに

完全グラフの場合にも第 3 節の議論を適用できる．他にも適用可能なグラフの種類があるかの確認は今後の検討課題である．前回の報告で扱ったグリッドグラフは（完全でない）二部グラフである．第 3 節の議論を適用しようとするとグラフの類別等で複雑になることが予想される．

謝辞：本研究は JSPS 科研費 17K01281 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Alpern,S. and Gal,S. (2003) *The theory of search games and rendezvous.* Kluwer's INTERNATIONAL SERIES. esp. pp.95-97.

[2] Baston,V. and Kikuta,K.(2019) A Search problem on a bipartite network. European J. Operational Research **277** 227-237.

[3] 菊田健作 (2018) グリッドグラフ上の探索問題．日本 OR 学会 2018 年秋季研究発表会アブストラクト集，88-89.