

## 最大近隣距離分布の導出と第6近隣距離分布との比較

02006530 東京大学 薄井宏行 USUI Hiroyuki

### 1. はじめに

平面上において点群が一定の密度で一様ランダムに分布する状況を考える。このとき、任意の点から最近隣に位置する点までの距離、第二近隣に位置する点までの距離、第 $k$ 近隣に位置する点までの距離（以降、「第 $k$ 近隣距離」と記す。）が定まる。第 $k$ 近隣距離の確率密度関数（第 $k$ 近隣距離分布）は理論的に導出されており、点の密度から推定することができる<sup>1)</sup>。以降、平面上に分布する点群を生成元とするドローネ三角網に基づいて、点の近隣関係を定義する。すなわち、ある二つの点がドローネ辺の両端点となるならば、二つの点は互いに近隣関係にあると定義する。このとき、任意の点について、近隣関係にある点までの距離（近隣距離）の最小値と最大値がそれぞれ定まる。後者を「最大近隣距離」と定義する。前者は最近隣距離に対応する。前述のように最近隣距離分布は理論的に導出されている。ところが、最大近隣距離の確率密度関数（以降、「最大近隣距離分布」と記す。）は理論的に導出されていない。

最大近隣距離分布は、都市計画における様々な課題の解決に貢献すると考えられる。たとえば、歩いて暮らせるまちづくりの実現は喫緊の課題である。人口に占める高齢者の割合はさらに増加することが見込まれ、歩行者が休むことなく継続して歩ける距離（以降、「継続歩行距離」と記す。）が一定距離以下となるようなベンチ等の配置計画は今後ますます重要となる。高齢者にとって数百メートルの歩行は容易でない。高齢者の移動を支援する施策の一つとして、歩行空間においてベンチ等を整備する必要性も指摘されている。ベンチ等の設置間隔の希望調査を実施した結果、1)約50%の高齢者は200mの設置間隔を希望すること、2)約80%の高齢者は100mの設置間隔を希望することが明らかにされている<sup>2)</sup>。ベンチ等の設置間隔の希望は、高齢者の継続歩行距離を反映するものである。また、最大近隣距離の最頻値は第6近隣距離である性質に着目し、最大近隣距離分布の近似分布として第6近隣距離分布を採用することで、東京駅周辺における継続歩行距離が一定距離以下となるようなベンチ等の密度を確率論的に示した研究もある<sup>3)</sup>。ほかにも、継続走行距離が短い自動車等の燃料供給施設の配置計画にも貢献すると期待される。

本稿では、最大近隣距離分布の導出を試みる。以降、第2節において、第 $k$ 近隣距離分布を $k$ の条件つき確率密度関数とみなし、 $k$ の確率密度関数との積和を考える。第3節において、最大近隣距離が100m以上となる確率に基づいて、第6近隣距離分布との比較を行い、最大近隣距離分布を第6近隣距離分布として近似する妥当性を検討する。

### 2. 最大近隣距離分布の導出

面積 $S$ の区域に休憩施設が一様ランダムに $n$ 個配置されている状況を考える。平面上において、任意の休憩施設を点 $F_i$ として表す。有限平面における最近隣距離分布は、無限平面における最近隣距離分布とよく適合することが知られている<sup>4)</sup>。無限平面を想定すると、点 $F_i$ から第 $k$ 近隣に位置する休憩施設までの第 $k$ 近隣距離 $R$ が $r$ 以下となる確率 $F(R \leq r)$ は近似的に次式ようになる：

$$F(R \leq r) = 1 - \sum_{v=0}^{k-1} \frac{(\rho \pi r^2)^v}{v!} e^{-\rho \pi r^2}. \quad (1)$$

以降、(1)式を $k$ の条件つき累積分布関数 $F(R \leq r | k)$ とみなす。 $k$ の統計分布は休憩施設を表す点群を生成元とするポロノイ多角形の辺数の統計分布に一致する。とくに、点群が一様ランダムに分布する場合、ポアソンポロノイ多角形と呼ばれている。既往研究では、ポアソンポロノイ多角形とその双対図形であるポアソンドローネ三角網に関する性質は統計的に研究され続けている<sup>5)</sup>。ところが、ポアソンポロノイ多角形の辺数をはじめとする確率密度関数は解析的に導出されていない。数値シミュレーションに基づく研究によると、ポアソンポロノイ多角形の辺数はガンマ分布や対数正規分布に従うことが知られている。

図1は、休憩施設の密度 $\rho$ を変化させたときの $k$ の相対度数分布を描いたものである。図1において、

$$r_{\text{grid}} \equiv 1/\sqrt{\rho} = \sqrt{S/n} \quad (2)$$

は休憩施設の規範的な配置パターンとして、正方格子状を想定した場合の最近隣距離であり一定の値をとる。いま、 $r_{\text{grid}}$ を休憩施設の設置間隔の基準とする。図1から、 $r_{\text{grid}}$ の値の違いに関らず、 $k$ の相対度数分布は概ね同じであることがわかる。 $k$ の平均と分散はそれぞれ6.0と1.6となる。本稿では、(1) $k$ は3以上11以下の自然数であること、(2) $k$ の相対度数分布は左右対称な単峰分布であることから、 $k$ の統計分布の近似モデルとして二項分布を採用する：

$$g(k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}. \quad (3)$$

ただし、 $m$ は区域における $k$ の最大値 ( $m=11$ ) である。二項分布の平均は $mp=6$ であることから、 $p=6/11$ となる。このとき、最大近隣距離が $r$ 以下となる確率は、 $F(R \leq r | k)$ と $g(k)$ の $3 \leq k \leq m$ に関する積和となる：

$$\begin{aligned} F(R_{\text{max}} \leq r) &= \sum_{k=3}^{m=11} g(k) F(R \leq r | k) \\ &= \sum_{k=3}^{m=11} g(k) \left\{ 1 - \sum_{v=0}^{k-1} \frac{(\rho \pi r^2)^v}{v!} e^{-\rho \pi r^2} \right\} \\ &= \sum_{k=3}^{m=11} g(k) - \sum_{k=3}^{m=11} g(k) \sum_{v=0}^{k-1} \frac{(\rho \pi r^2)^v}{v!} e^{-\rho \pi r^2}. \quad (4) \end{aligned}$$

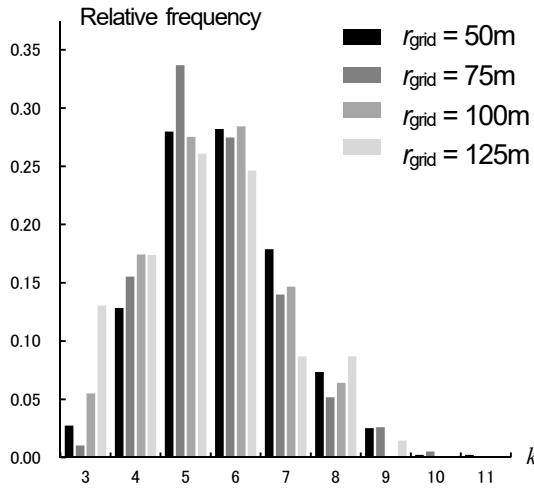


図1：ポアソンボロノイ多角形の辺数 $k$ の相対度数分布

(4)式の辺々を $r$ で微分することにより、任意の休憩施設から最大近隣に位置する休憩施設までの距離分布は次式のように導出される：

$$f(r) = \sum_{k=3}^{m=11} g(k) \frac{d}{dr} \left\{ \sum_{v=0}^{k-1} \frac{(\rho\pi r^2)^v}{v!} e^{-\rho\pi r^2} \right\}$$

$$= \sum_{k=3}^{m=11} g(k) \frac{2\rho\pi r(\rho\pi r^2)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\rho\pi r^2}. \quad (5)$$

(5)式から、最大近隣距離分布は第 $k$ 近隣距離分布と $g(k)$ の重みづけ線型和として導出されることがわかる。

### 3. 第6近隣距離分布との比較

図2は、 $r_{\text{grid}} = 50\text{m}$ ,  $r_{\text{grid}} = 75\text{m}$ ,  $r_{\text{grid}} = 100\text{m}$ の場合について、(5)式で与えられる最大近隣距離分布と第6近隣距離分布をそれぞれ実線と破線で描いたものである。理論モデルとの比較のため、東京駅周辺（大手町・丸の内地区）において、ベンチ等の位置を一樣ランダムな点で与えたときの最大近隣距離の相対度数分布を描いた。図2から、最頻値において、第6近隣距離分布のほうが最大近隣距離分布よりも0.02から0.03程度大きいことがわかる。

表1は、 $r_{\text{grid}} = 50\text{m}$ ,  $r_{\text{grid}} = 75\text{m}$ ,  $r_{\text{grid}} = 100\text{m}$ の場合について、最大近隣距離と第6近隣距離が100m以上となる確率 $\Pr\{100 \leq r\}$ を示したものである。表1から、(1) $r_{\text{grid}} = 50\text{m}$ の場合、最大近隣距離分布を第6近隣距離分布として近似すると、 $\Pr\{100 \leq r\}$ を0.03程度過小推定すること、(2) $r_{\text{grid}} = 75\text{m}$ と $r_{\text{grid}} = 100\text{m}$ の場合、最大近隣距離分布を第6近隣距離分布として近似すると、 $\Pr\{100 \leq r\}$ をそれぞれ0.05と0.02程度過大推定されることがわかる。

表1：最大近隣距離と第6近隣距離が100m以上となる確率

	最大近隣距離分布	第6近隣距離分布
$r_{\text{grid}} = 50\text{m}$	0.30	0.27
$r_{\text{grid}} = 75\text{m}$	0.85	0.90
$r_{\text{grid}} = 100\text{m}$	0.97	0.99

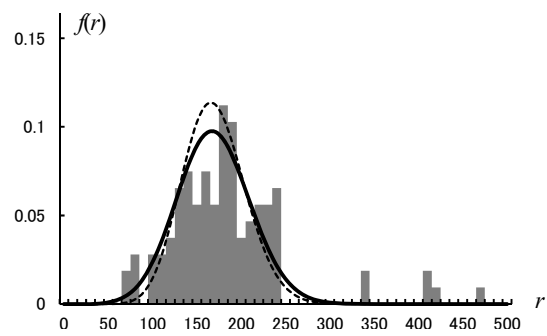
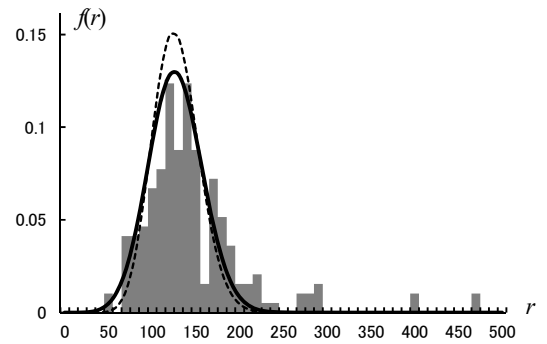
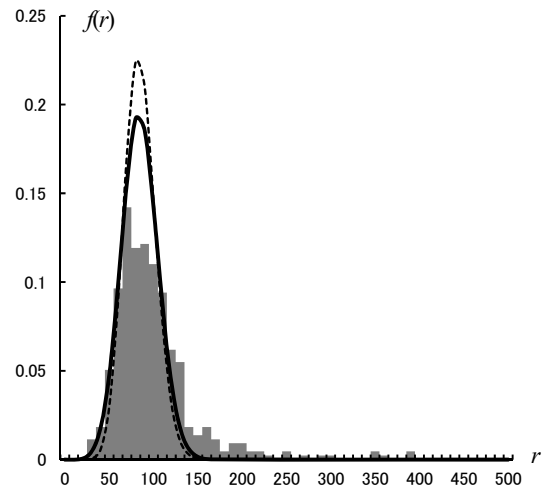


図2：最大近隣距離分布（実線）と第6近隣距離分布（破線）

（上段： $r_{\text{grid}} = 50\text{m}$ ，中段： $r_{\text{grid}} = 75\text{m}$ ，下段： $r_{\text{grid}} = 100\text{m}$ ）

### 4. おわりに

本稿では、最大近隣距離分布を第6近隣距離分布として近似する妥当性を検討した。点の密度によって、最大近隣距離が100m以上となる確率を過小推定する場合も過大推定する場合もあることに留意すべきことがわかった。

#### 謝辞

東京大学の浅見泰司先生と樋野公宏先生より貴重なコメントを頂きました。ここに記し謝意を申し上げます。

#### 主要参考文献

- 1) 藤塚武志, 1985, 都市施設の密度と利用者からの距離との関係について, 都市計画論文集, 20, pp.85-90.
- 2) 栗田治, 2013, 都市と地域の数理モデル - 都市解明における数学的方法 -, 共立出版.
- 3) 土居聡, 三星昭宏, 北川博巳, 1999, 高齢者を考慮した歩行空間の休憩施設設置に関する研究, 土木計画学研究・講演集, 22, pp.925-928.
- 4) 薄井宏行・樋野公宏, 2019, 高齢者の歩行特性を考慮した休憩施設の密度と最長継続歩行距離 - 東京駅および大手町駅周辺地区を対象に -, 日本建築学会計画系論文集, 84(762), pp.1779-1787.
- 5) Okabe, A., et al. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Wiley.