状態遷移拡散過程にもとづく土砂投入方針の最適化モデル

島根大学　＊吉岡　秀和　YOSHIOKA Hidekazu
岩手大学　濱上　邦彦　HAMAGAMI Kunihiko
01308754　同志社大学　辻村　元男　TSUJIMURA Motoh

1. はじめに

現代の人間生活は，河川を横断して設置される水利構造物であるダムから正負の影響を受けている．正の影響としては，安定した水資源供給や洪水緩和による浸水被害軽減がある．一方，負の影響としては，ダムの存在による水産資源の回遊経路分断や，ダム下流の流水環境の人為的改変がある．人間生活と環境の調和[1]が強く求められている現代社会において，その実現を推進できる河川環境管理のあり方を検討することの意義は極めて大きい．河川環境に関わる様々な動態を数理的に記述したうえで最小化または最大化されるべき評価関数を設定し，その最適化を目指す制御理論的枠組み[2]を用いれば，河川環境管理を系統的に考究することができると考えられる．

近年，発表者らは，確率制御理論[2]に依拠したダム下流における河川環境管理の数理モデリングについて，河川を生息場とするアユなどの水産資源に注目した研究を展開してきた．この方法論は動的計画原理に立脚しており，そのゴールは，実現すべき河川管理方針を出力できる最適性方程式を求解することである．Yaegashi et al. [3]は特異制御の観点から，水産資源を捕食する水鳥に対する費用対効果が良い駆除方針を解析的に検討した．Yoshioka et al. [4]は水産資源の餌と競合し得る河床付着藻類繁茂の抑制策を，有限差分法に基づく数値計算により検討した．

上述した研究事例を含めて，既往研究では河川環境の季節性や非定常性を考慮した最適化モデリングに関する知見は未だに限定的である．例えば，ダムがある河川においてもその下流の流況は時間的に一定ではなく，降雨やダム操作と連動して流量が変動する．さらに，流量の変動は河床に作用する流体力学的な作用(せん断応力)の変動をもたらし，結果として付着藻類の剥離ダイナミックスに影響を及ぼす．

本発表では，付着藻類の管理に関わる河川流況の非定常性を鑑みた最適化モデルを構築する．とくに，ごく最近議論され始めた，ダム下流の河道に土砂を投入することで付着藻類の剥離を促進する試み[4]に焦点を絞り，実河川を想定した数値計算例を示す．

2. 数理モデル

Yoshioka et al. [4]にもとづき，ダム下流の河川区間における付着藻類と土砂の連続時間ダイナミックスを，伊藤型確率微分方程式で定式化する．解の存在や一意性など，数学的に厳密な議論はここで行わない：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t &= (1-X_t)X_t\left(r(X_t,\alpha_t)\mathrm{d}t+\sigma(X_t,\alpha_t)\mathrm{d}B_t\right)\\ &\quad -f(X_t,Y_t,\alpha_t)\mathrm{d}t\end{aligned}, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}Y_t = -g(Y_t,\alpha_t)\mathrm{d}t\,. \tag{2}$$

t は時刻，B_t は 1 次元標準 Brown 運動，$0 \le X_t \le 1$ は付着藻類の存在量，$0 \le Y_t \le 1$ は藻類の剥離をもたらす土砂の存在量である．α_t は 0 か 1 の値をとる連続時間 Markov 連鎖であり，$\alpha_t = 1$ が藻類の剥離がある大流量の状態，$\alpha_t = 0$ がそうでない小流量の状態をあらわす．状態 i から $1-i$ への遷移率を $\lambda_{i,1-i}$ と書く ($i = 0,1$)．$r \ge 0$ と $\sigma \ge 0$ はそれぞれ藻類の決定論的および確率論的な成長率，$f \ge 0$ は藻類の剥離率，$g \ge 0$ は土砂の流亡率である．藻類が存在しない場合には剥離がなく，土砂が存在しない場合には流亡がない．したがって，$f|_{X_t=0} = 0$ かつ $g|_{Y_t=0} = 0$ とする．

自然河川では上流から土砂供給があるが，ダム下流でこれは期待できず，一般に土砂の流亡により剥離率が低下していく．そのため，外部からの投入により土砂供給を実現する試みが，山陰地方の河川等で進められている．これは，数学的にはインパルス制御である．すなわち，土砂の投入時刻を τ，その時刻の投入量を η_τ とし，時刻 τ では(2)ではなく次式を課す：

$$0 \le Y_\tau = Y_{\tau-0} + \eta_\tau \le 1\,. \tag{3}$$

2018 年度に岩手大学の実験施設で実施された水理実験によれば，藻類の存在量は土砂投入直後の数十分で急激に著しく減少し，その後は土砂供給がある間は漸次的に減少することが確認されている．この実験結果から，$0 < \beta < 1$，$\alpha_t = 0$ から $\alpha_t = 1$ に遷移する時刻を θ として，時刻 θ では(1)ではなく次式を課す：

$$X_\theta = (1-\beta)X_{\theta-0}\ \ (\text{if}\ \ Y_\theta > 0\,). \tag{4}$$

本モデルでは，土砂の投入時刻τ，ならびにその時刻の投入量ηが制御変数である．これらは河川管理者により意思決定される．本モデルでは，無限時間にわたる以下の評価関数を用いる[4]：

$$J\left(x,y,\alpha;\{\tau_k\}_{k\geq 0},\{\eta_k\}_{k\geq 0}\right) = \mathrm{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}X_s \mathrm{d}s + \sum_{k\geq 0} e^{-\delta\tau_k}\left(k_0+k_1\eta_k\right)\right]. \quad (5)$$

$\left(X_{0-},Y_{0-},\alpha_{0-}\right)=\left(x,y,i\right)$は観測値，Eは期待値，$\tau_k$は投入時刻であり増加列，$\eta_k$は$\tau_k$での投入量，$\delta>0$は割引率，$k_0>0$は投入の固定費用で人件費など，$k_1>0$は投入量に関する比例コストの比例係数である．式(5)の右辺は，第1項が付着藻類の存在による負の効用，第2項が土砂投入のコストをあらわす．

動的計画原理により，観測$\left(X_{0-},Y_{0-},\alpha_{0-}\right)=\left(x,y,i\right)$にもとづき$J$を最小化する最適な土砂投入方針は，以下の最適性方程式を解くことで得られる：

$$\max\left\{\delta\Phi-L\Phi-x,\Phi-M\Phi\right\}=0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad (6)$$

$$M\Phi=\min_{0\leq\eta\leq 1-y}\left\{k_0+k_1\eta+\Phi\left(x,y+\eta,i\right)\right\} \quad \text{in} \quad \Omega, \quad (7)$$

$$\Omega=\left\{\left(x,y,\alpha\right)\middle| 0\leq x,y\leq 1, i\in\{0,1\}\right\}. \quad (8)$$

$\Phi=\Phi\left(x,y,\alpha\right)$は最小化された評価関数，$L$は藻類と土砂のダイナミックスに対応する非局所退化楕円型偏微分演算子であり，一意に規定される．

式(6)は非局所退化楕円型の準変分不等式であり，解析解は得られていない．この非局所性は土砂投入(3)と状態遷移(4)によりもたらされ，それぞれ式(6)の演算子Lと式(7)の演算子Mにあらわれる．とくに，後者の非局所性は，河川環境管理の問題に限らず既往研究であまり扱われていない．最適性方程式に境界条件が課されない点も，標準的ではない．これは，係数の領域境界上での退化と符号に起因する．式(7)右辺を最小化する$\eta=\eta\left(x,y,\alpha\right)$が観測$\left(x,y,\alpha\right)$に対応する最適土砂投入量であり，この算出が本問題のゴールである．ただし，その一意性は非自明である．

3. 数値計算例

式(6)を，処罰法を用いた有限差分法により離散化して数値解を算出する．モデルパラメータは島根県斐伊川の尾原ダム下流を対象に同定する．例えば，ダム下流での流量時系列と現地観測結果から，$\lambda_{0,1}=0.55$ (1/day)，$\lambda_{1,0}=0.059$ (1/day)と同定される．大・小流量の閾値は10 (m^3/s)である．また，実験結果からfは$X_t\left(-\ln X_t\right)^{\frac{1-a}{a}}$ ($a=0.54$)に比例するとした．

図1に示す計算結果から，観測時の付着藻類と土砂の存在量や流況に応じて，土砂を投入すべきか，投入すべき場合はその量はどれだけか，を意思決定できる．本発表の計算条件では，流量が小さい時は土砂投入を行う観測値の範囲が図1より小さい．$\delta\to+0$とするエルゴード極限(時間平均の最適化)も近似計算可能であるが，計算時間はδ^{-1}に対して増大する．

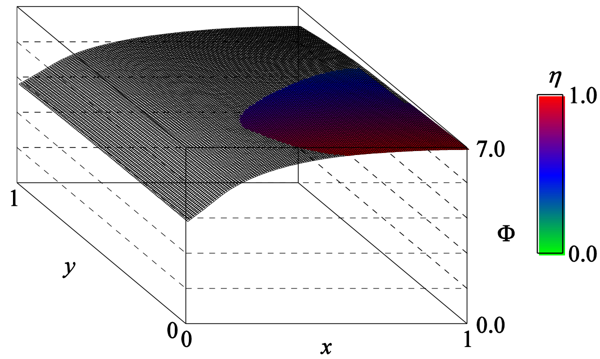

図 1. 最適性方程式の数値解($i=1$).

4. おわりに

本発表の数理モデルは，河川管理者がダイナミックスに関する完全情報を有するという仮定に基づく．連続過程の離散観測の概念[5]を応用したアプローチによれば，この仮定を緩和できる．最適性方程式については，粘性解の観点から数学解析を進めている．

参考文献

[1] Luo, Z. et al. (2018). A new framework for assessing river ecosystem health with consideration of human service demand. *Science of The Total Environment*, 640, 442-453.

[2] Øksendal, B. & Sulem, A. (2019). *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Springer, Cham.

[3] Yaegashi, Y. et al. (2018). A singular stochastic control model for sustainable population management of the fish-eating waterfowl *Phalacrocorax carbo*. *Journal of Environmental Management*, 219, 18-27.

[4] Yoshioka, H. et al. (2019). Hamilton–Jacobi–Bellman quasi-variational inequality arising in an environmental problem and its numerical discretization. *Computers & Mathematics with Applications*, 77, 2182-2206.

[5] Yoshioka H. et al. (2019). Application of an adaptive viscosity scheme to discretization of the optimality equation for a discrete costly observation problem, *計算工学講演会論文集*, Paper No. F-08-01, 1-6.