日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 秋季研究発表会

Recovery Theorem を用いた資産価格変動要因の分解 –米国株式指数の変動要因に関する実証分析–

03000230 慶應義塾大学大学院理工学研究科
(株) 三菱 UFJ トラスト投資工学研究所 (MTEC)* ＊霧生拓也 KIRIU Takuya
01505910 慶應義塾大学理工学部 枇々木規雄 HIBIKI Norio

1. イントロダクション

資産価格の変動要因を特定することはファイナンス研究における重要なトピックであり，これまでに複数の変動要因の分解方法が提案されている（Campbell[1], Chen et al.[2]）. しかし，日次など短期の価格変動要因を分析するのに適した方法は少ない．本研究では，短期の価格変動要因を分析可能な新たな分解方法を提案する．この方法ではオプション価格から Recovery Theorem（RT）を用いて推定した実分布と確率的ディスカウントファクター（SDF）をもとに，資産価格の変化をキャッシュフロー要因（CF 要因）と割引率要因（DR 要因）に分解する．オプション価格には公開情報が迅速に織り込まれるため，長期の価格変動だけでなく短期の価格変動に対しても変動要因を分析できる．提案方法を用いて S&P500 指数の日次リターンの変動要因を分析した結果を示す.

2. 資産価格変動要因の分解

時点 t における資産価格 p_t は将来時点 $t+\Delta t$ における資産価格 $p_{t+\Delta t}$ を時点 t における SDF $m_t(p,\Delta t)$ で割り引いた期待値として表現できる．

$$p_t = \int_{-\infty}^{\infty} p f_t^P(p,\Delta t) m_t(p,\Delta t) dp \tag{1}$$

ここで，$f_t^P(p,\Delta t)$ は実測度 P の下での条件付き密度関数（実分布）である．この関係より，時点 t_0 から時点 t_1 までの資産価格リターン r に対する分解式を導出できる．

$$r = \frac{p_{t_1} - p_{t_0}}{p_{t_0}} = r_{CF} + r_{DR} \tag{2}$$

$$r_{CF} = \frac{1}{p_{t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} p \left(f_{t_1}^P(p,\Delta t) - f_{t_0}^P(p,\Delta t) \right) \left(\frac{m_{t_1}(p,\Delta t) + m_{t_0}(p,\Delta t)}{2} \right) dp \tag{3}$$

$$r_{DR} = \frac{1}{p_{t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} p \left(\frac{f_{t_1}^P(p,\Delta t) + f_{t_0}^P(p,\Delta t)}{2} \right) (m_{t_1}(p,\Delta t) - m_{t_0}(p,\Delta t)) dp \tag{4}$$

(2) 式は，資産価格リターンが将来キャッシュフローに対する期待（実分布）の変化による部分（CF 要因）r_{CF} と割引率（SDF）の変化による部分（DR 要因）r_{DR} に分解できることを表している．Δt には任意の期間を設定でき，どの期間の実分布や SDF に注目してリターンを説明するかを表す．また，この関係式より，リターンの分散 $\mathrm{Var}(r)$ も CF 要因と DF 要因に分解できる．

$$\mathrm{Var}(r) = \mathrm{Cov}(r_{\mathrm{CF}}, r) + \mathrm{Cov}(r_{\mathrm{DR}}, r) \tag{5}$$

3. RT を用いた実分布と SDF の推定

RT はオプション価格から計算した状態価格を用いて実分布と SDF を推定できることを示した定理である．市場は完備であるとし，時間分離可能な効用を持つ代表的投資家の存在を仮定する．市場の状態 $s(=1,\ldots,s_0,\ldots,\bar{s})$ を原資産価格によって定義し，現在の状態 s_0 から時点 $\tau(=1,\ldots,\bar{\tau})$ の状態 s への推移に関する状態価格を $\pi_{\tau,s}$，主観的割引係数を δ，状態 s における限界効用を h_s とする．$\pi_{\tau,s}$ はオプション価格から推定可能なため，既知とする．δ^τ に関して $\delta^\tau \approx a_\tau + b_\tau \delta$, $a_\tau = -(\tau-1)\delta_0^\tau$，$b_\tau = \tau\delta_0^{\tau-1}$ のように 1 次近似すると，

$$\begin{bmatrix} -b_1 & \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,s_0-1} & \pi_{1,s_0+1} & \cdots & \pi_{1,\bar{s}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{\bar{\tau}} & \pi_{\bar{\tau},1} & \cdots & \pi_{\bar{\tau},s_0-1} & \pi_{\bar{\tau},s_0+1} & \cdots & \pi_{\bar{\tau},\bar{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ h_1^{-1} \\ \vdots \\ h_{s_0-1}^{-1} \\ h_{s_0+1}^{-1} \\ \vdots \\ h_{\bar{s}}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \pi_{1,s_0} \\ \vdots \\ a_{\bar{\tau}} - \pi_{\bar{\tau},s_0} \end{bmatrix} \tag{6}$$

が成り立つ．(6) 式を行列 $\boldsymbol{B}$，ベクトル $\boldsymbol{h_\delta}, \boldsymbol{a_\pi}$ で置き換え，両辺の差が最小になるように未知変数 $\boldsymbol{h_\delta}$ を推定する．(Jensen et al.[3])

$$\min_{\delta, h_s} \quad ||\boldsymbol{B}\boldsymbol{h_\delta} - \boldsymbol{a_\pi}||_2^2 \tag{7}$$

実確率 $f_{\tau,s}^P$ と SDF $m_{\tau,s}$ は以下の式で計算できる．

$$m_{\tau,s} = \delta^\tau h_s \tag{8}$$

$$f_{\tau,s}^P = \frac{1}{\delta^\tau} h_s^{-1} \pi_{\tau,s} \tag{9}$$

しかし，(7) 式は非適切問題であり，安定的に解を推定することが困難である．そこで，本研究では伊藤ら [4] の提案する安定化方法を用いて (7) 式の解を推定する．この方法は，まず，解の特徴を大まかに表現するために投資家の効用関数に CRRA 型効用を仮定して変数を減らして解を推定しておき，次にその情報を先験情報として利用して解を推定し直す，2 段階の推定方法である．

＊本稿の内容は筆者が所属する組織を代表するものではなく，すべて個人的な見解である．

4. 実証分析

4.1. 分析の概要

提案法を用いて S&P500 指数の 2007 年 1 月 3 日から 2018 年 8 月 31 日までの日次リターンの変動要因を分析する．オプション価格は CBOE で取引されている S&P500 オプションの取引終了時の仲値を利用した．

4.2. S&P500 日次リターンの分解

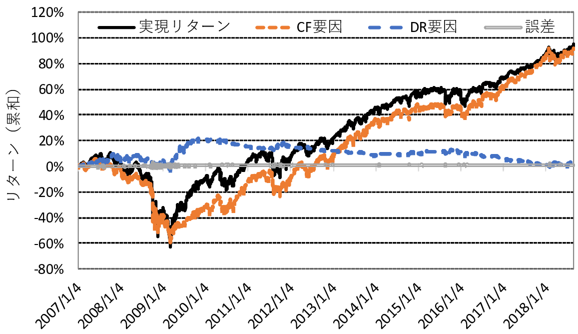

図 1: S&P500 リターンの分解

表 1: S&P500 リターンの分解 (年率)

	平均	（比率）	分散	（比率）
実現リターン	8.12%		0.0391	
CF 要因	7.84%	96.6%	0.0315	80.6%
DR 要因	0.19%	2.4%	0.0068	17.4%
誤差	0.08%	1.0%	0.0008	1.9%

図 1 は (3) 式，(4) 式において Δt を 30 日に設定し，S&P500 の日次リターンを分解した結果である．表 1 には実現リターンを時点ごとに分解した結果の平均値と，実現リターンの分散を要因分解した結果を示している．誤差は RT を用いた推定の際の最適化問題の残差に起因して発生するものであるが，その変動は CF 要因や DF 要因と比較して十分に小さく，ほぼ正確に実現リターンを分解できている．

通期では CF 要因が年率 7.84% と実現リターンの 8.12% のほとんどの部分を占めていることが確認できる．一方で，DR 要因は 0.19% の寄与と小さかった．ただし，DR 要因の寄与は常に小さいわけではなく，2009 年には約 20% 寄与するなど時期によって傾向が異なっていることもわかる．また，リターンの分散に対する寄与は DF 要因の占める割合が 17.4%であったのに対して CF 要因の占める割合が 80.6% と大きく，CF 要因が価格変動の主要因となっている．

4.3. Δt の設定に関する感度分析

(3) 式，(4) 式における Δt の設定は任意であるが，Δt の設定によって分解の結果がどの程度変化するかについては定かではない．そこで，Δt の設定が分解の結果に与える影響を分析するために Δt を 30 日，90 日，180 日，360 日に変化させて感度分析を行う．図 2 および図 3 は Δt を変化させたときの各要因の値を比較した結果である．いずれの場合も変動の仕方は似通っており，分析した範囲では Δt を変化させても分解結果に与える影響はあまり大きくないことが確認できた．

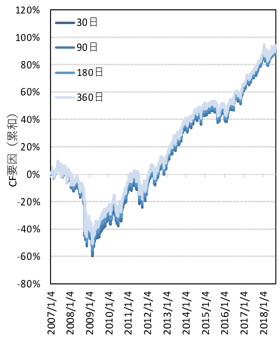

図 2: 実分布要因

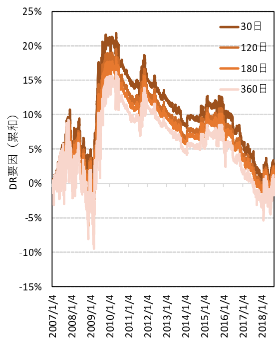

図 3: SDF 要因

5. まとめ

本研究では短期の価格変動要因を分析可能な分解方法を提案し，S&P500 の日次リターンの変動要因について分析を行った．分析結果より，日次のリターンの平均，分散に対する寄与はどちらも CF 要因が大半を占めていることが明らかになった．

今後の課題としては先行研究で提案されている時系列モデルで DF 要因を推定する方法（Campbell[1]）やアナリスト予想から CF 要因を推定する方法（Chen et al.[2]）と比較することや，リターンの分解結果をもとに経済イベントやニュースに対する投資家の反応について分析することが挙げられる．

参考文献

[1] J. Y Campbell. A variance decomposition for stock returns. *The Economic Journal*, 101(405), 157–179, 1991.

[2] L. Chen, Z. Da and X. Zhao. What drives stock price movements?. *Review of Financial Studies*, 26(4), 841–876, 2013.

[3] C. S. Jensen, D. Lando and L. H. Pedersen. Generalized recovery. *Journal of Financial Economics*, 133(1), 154–174, 2019.

[4] 伊藤雅剛・霧生拓也・枇々木規雄. Generalized Recovery Theorem を用いた forward looking な収益率分布の推定. ジャフィー・ジャーナル, 17, 76–99, 2019.