

Recovery Theorem を用いた最適資産配分モデル

慶應義塾大学大学院理工学研究科
03000230 慶應義塾大学大学院理工学研究科
(株)三菱UFJトラスト投資工学研究所 (MTEC)[†]
01505910 慶應義塾大学理工学部

*枇々木裕太 HIBIKI Yuta
霧生拓也 KIRIU Takuya
枇々木規雄 HIBIKI Norio

1. イントロダクション

近年、いくつかの先行研究でオプション価格から推定したインプライドリスク中立分布 (RND) をリスク調整して最適資産配分問題に適用することでヒストリカル分布を用いた場合よりも運用パフォーマンスが向上することが報告されている。ただし、霧生・枇々木 [1] は最適資産配分問題においてリスク調整前後の分布を比較した結果から、リスク調整によって、運用パフォーマンスが悪化することを示し、その理由としてリスク調整が過去データに依存する backward looking な方法であったことを挙げている。本研究では過去のデータを用いずにリスク調整を可能にした Recovery Theorem (RT) を最適資産配分問題に用いた場合にパフォーマンスが向上するか検証する。具体的には、伝統的 4 資産の 1 期間最適資産配分問題において株式の収益率分布に RND を用いた場合と RT でリスク調整した分布を用いた場合を比較する。

2. Recovery Theorem

RT は、オプション価格から推定したリスク中立分布 (状態価格) から実分布を一意に復元できることを示した定理である。市場は完備で裁定機会は存在せず、時間加法的異時点間期待効用理論に従う代表的投資家の存在を仮定する。現在の状態 s_1 から時点 t における状態 s_j ($j = 1, 2, \dots, S$) への推移に関する状態価格を $\pi_{t,j}$ 、実確率を $f_{t,j}$ とし、 s_1 を基準に正規化した s_j の限界効用を h_j 、主観的割引係数を δ とする。 $\delta^t \approx a_t + b_t \delta$, $a_t = -(t-1)\delta_0^t$, $b_t = t\delta_0^{t-1}$ のように 1 次近似すると、 $\pi_{t,j}$, h_j , δ の関係は (1) 式のように表現できる。

$$\begin{bmatrix} -b_1 & \pi_{1,2} & \cdots & \pi_{1,S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_T & \pi_{T,2} & \cdots & \pi_{T,S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ h_2^{-1} \\ \vdots \\ h_S^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \pi_{1,1} \\ a_2 - \pi_{2,1} \\ \vdots \\ a_T - \pi_{T,1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$f_{t,j} = \frac{\pi_{t,j}}{\delta^t h_j} \quad (t = 1, \dots, T; j = 1, \dots, S) \quad (2)$$

[†]本稿の内容は共著者が所属する組織を代表するものではなく、すべて個人的な見解である。

また、 $f_{t,j}$ は (1) 式の左辺第 2 項のベクトル h_δ を用いて (2) 式のように記述できる。 h_δ は (1) 式の両辺の差を最小化することで推定されるが、その際に、非適切問題を解く必要があり、オプション価格データのノイズが解に大きく影響を与えてしまう可能性がある。そこで、本研究では先験情報を考慮した正則化項を入れることで得られる解の安定化を図る伊藤ら [2] の方法を用いる。また、RT には、状態価格の推移に斉次マルコフ性を仮定するタイプと仮定しないタイプの 2 種類がある。両者を区別するため、以降では前者を RRT、後者を GRT と呼ぶ。

3. 最適資産配分モデル

本研究では伝統的 4 資産 (内株・外株・内債・外債) に対する資産配分を 80%CVaR 最小化モデルを用いて導出する。

集合および添字

i : パスを表す添字 j : 資産を表す添字
 F : 外債建て資産を表す集合

パラメータ

I : サンプルパスの本数 n : 資産数 d : 円無リスク金利
 f : 外債無リスク金利 β : CVaR の信頼水準 ($\beta = 0.80$)
 r_j^i : 資産 j のパス i の収益率

決定係数

x_j : 資産 j への投資比率 α_β : β -VaR q^i : 中間変数

定式化

$$\text{最小化} \quad \alpha_\beta + \frac{1}{(1-\beta)I} \sum_{i=1}^I q^i \quad (3)$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{j=1}^n x_j + \sum_{j \in F} (f-d)x_j = 1 \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n r_j^i x_j + \alpha_\beta + q^i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, I) \quad (5)$$

$$q^i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, I) \quad (6)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (7)$$

4. バックテスト

4.1. 分析の概要

想定する分布をヒストリカル分布, RND, RRT, GRT (先験情報: RND), GRT (先験情報: CRRA 型

効用関数)の5通りとし、これらを内株のみ、外株のみ、内株と外株の3通りの組み合わせに対して適用したケースに対してバックテストを行う。内債と外債にはいずれのケースもカーネル密度推定(ウィンドウ期間60ヶ月)によって推定したヒストリカル分布を利用する。資産間の依存構造はtコピュラで記述し、4資産の収益率の同時分布をもとにシミュレーションパスを発生させて最適資産配分を導出する。リバランスは各月初で行うものとする。また、分析期間は2005年1月から2018年9月までとし、予備分析の結果をもとに状態幅は動的に変化させ、状態数は51個とする。

4.2. データ

資産 内株：日経225 外株：S&P500
 内債：FTSE GBIJP 外債：FTSE GBIUS
 金利 円貨無リスク金利：1ヶ月のJPY LIBOR
 外貨無リスク金利：1ヶ月のUSD LIBOR
 オプション 内株：日経225オプション
 外株：S&P500オプション

4.3. 運用パフォーマンスの比較

表1: 80%-CVaR(月率)

	内株のみ	外株のみ	内株と外株
ヒストリカル	0.643%	0.643%	0.643%
RND	0.656%	0.646%	0.671%
RRT	0.612%	0.596%	0.572%
GRT(RND)	0.651%	0.646%	0.673%
GRT(CRRA)	0.635%	0.634%	0.640%

表2: CVaR レシオ(月率)

	内株のみ	外株のみ	内株と外株
ヒストリカル	0.265	0.265	0.265
RND	0.271	0.277	0.273
RRT	0.285	0.343	0.361
GRT(RND)	0.272	0.275	0.270
GRT(CRRA)	0.282	0.286	0.296

表1と表2にそれぞれ各モデルのCVaRと効率性指標であるCVaRレシオを示す。まず、1資産にインプライド分布を適用した場合(内株のみ、外株のみ)について、ヒストリカル分布とインプライド分布を比較すると、CVaRに関してはRRTとGRT(CRRA)、CVaRレシオに関しては全てのケースでインプライド分布の方がアウトパフォームしていることが分かる。続いて、RNDとRTによってリスク調整した分布を比較すると、RRTとGRT(CRRA)はRNDよりもCVaRが低く、そしてCVaRレシオも高く、リスク調整の効果が確認できる。また、複数資産にインプライド分布を適用

した場合、RRTとGRT(CRRA)のCVaRおよびCVaRレシオが改善されており、forward lookingなリスク調整によって、運用パフォーマンスが向上することがわかった。

4.4. 累和リターンの推移

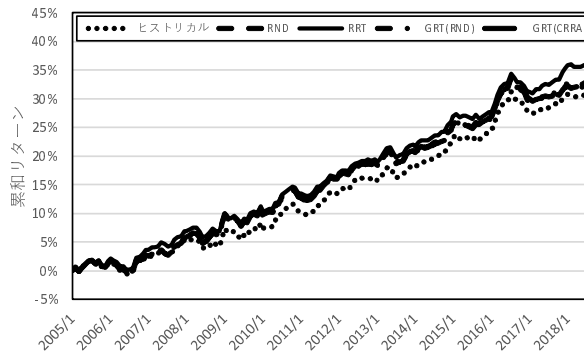


図1: 累和リターンの推移(外株のみ)

図1は各分布の累和リターンの推移を表している。まず、インプライド分布がヒストリカル分布をアウトパフォームしていることがわかる。また、図では確認しにくいですが、RNDはGRT(RND)とGRT(CRRA)の間に位置していることから、RRTとGRT(CRRA)がRNDをアウトパフォームし、累和リターンの観点からも、forward lookingなリスク調整によってパフォーマンスが向上することがわかった。

5. まとめ

本研究では最適資産配分モデルにRTを用いて収益率のインプライド分布をforward lookingにリスク調整した場合の運用パフォーマンスについて検証した。分析結果から、リスク調整した分布を用いることで運用パフォーマンスが向上し、その効果は複数資産に適用すると更に大きくなることが確認された。今後の課題としてはRTの各局面との相性を分析することが挙げられる。

参考文献

- [1] 霧生拓也・枇々木規雄. 複数資産にインプライド分布を用いた最適資産配分モデル. 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, 57, 112-134, 2014.
- [2] 伊藤雅剛・霧生拓也・枇々木規雄. Generalized Recovery Theoremを用いたforward lookingな収益率分布の推定. ジャフイー・ジャーナル, 17, 76-99, 2019.