ブロードキャスト型合意形成における合意結果の確率特性

千葉大学 *加藤大 KATOU Dai
01207040 千葉大学 塩田茂雄 SHIODA Shigeo

1. はじめに

様々な意見を有する複数のエージェントが，互いに意見を交換しながら自分の意見を逐次的に修正し，集団全体として合意に至る過程を記述する数理モデルが複数提案されている [1, 2, 3, 4]．これら数理モデルにおいて，合意に至る条件や収束の速さなどは明らかにされてきているが，合意結果の確率特性は殆ど知られていない．本稿では，一般的な会議や SNS 上での議論のように，確率的に選ばれた 1 つのエージェントが自分の意見を（隣接する）エージェントに公表するスタイルの「ブロードキャスト型合意形成」において，合意結果の確率特性について検討した結果を報告する．

2. モデル

隣接行列 $A = \{a_{ij}\}$ を有するノード数 $N(< \infty)$ の有向グラフ上のブロードキャスト型合意形成について，以下の数理モデルを用いて考察する．各ノード（エージェント）は自分の意見を数値化した変数（意見変数）を有する．時刻 n（$n = 1, 2, \dots$）におけるノード i（$i = 0, \dots, N-1$）の意見変数を $x_i(n)$ と記し，$\boldsymbol{x}(n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0(n), \dots, x_{N-1}(n))$ と定める．各離散時刻において，いずれか 1 つのノードが隣接ノードに対して自分の意見を発信（ブロードキャスト）する．各離散時刻において，ノード k が自分の意見を発信する確率を $p_k(> 0)$ とする（$\sum_{k=0}^{N-1} p_k = 1$）．時刻 n でノード k が意見を発信した際，ノード i は時刻 $n+1$ での意見変数を次式により定める．

$$x_i(n+1) = w_{ki} a_{ki} x_k(n) + (1 - w_{ki} a_{ki}) x_i(n).$$

ここで w_{ki} はノード k からの意見をノード i が取り入れる重みに相当する．上式は以下のように行列形式で書き下すことができる．

$$\boldsymbol{x}(n+1)^\top = Q^{(k)} \boldsymbol{x}(n)^\top.$$

ここで $Q^{(k)}$ はノード k が発言を行った際の意見変数の推移を表す行列であり，その ij 成分 $q_{ij}^{(k)}$ は以下で表される．

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 - w_{ki} a_{ki}, & i = j \\ w_{ki} a_{ki}, & i \neq j, j = k \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases}$$

さらに

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} p_k Q^{(k)},$$

を定義する．Q は確率行列である．以下では，Q で表される離散時間マルコフ連鎖の既約性と非周期性，及び時刻 0 での意見 $\boldsymbol{x}(0)$ が有界であることを仮定する．

3. 合意形成

ブロードキャスト型合意形成においては，確率 1 で合意が形成される（各ノードの意見変数が全て等しくなる）ことが知られており [3, 4]，前章のモデルにおいても次の定理に示す通り同様の結論が成立する．以下，$M(n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_i x_i(n)$，$m(n) \stackrel{\text{def}}{=} \min_i x_i(n)$ とする．

定理 3.1. 確率 1 で合意が形成される．すなわち

$$\lim_{n \to \infty} (M(n) - m(n)) = 0, \quad w.p.1$$

証明. 証明の概要のみ述べる．$M(n) - m(n)$ は n について単調減少であり，かつ $\lim_{n\to\infty} E[M(n) - m(n)] = 0$ であることが確認できる．したがって，単調収束定理より $M(n) - m(n)$ は確率 1 で 0 に収束する． □

Q の左固有ベクトルを π（すなわち $\pi = \pi Q$）とし，$G(n) \stackrel{\text{def}}{=} \pi \boldsymbol{x}(n)^\top$ を定義すると，$G(n)$ はマルチンゲールであることが確かめられる．$G(n) \leq \max_i \{x_i(0)\}$ であるから，マルチンゲールの収束定理により，$G(n)$ は $n \to \infty$ の極限で確率変数 G に収束する．確率 1 で合意が形成されることから，G は合意結果（合意結果）を表す確率変数である．

4. 合意結果の確率特性

前章で述べたように，ブロードキャスト型合意形成においては確率 1 で合意が形成され，合意結果は確率変数となる[1]．本章では合意結果 G の確率特性について考察する．簡単のため，

$$\forall i, j, \quad w_{ij} = w,$$

かつ，メッシュネットワークであること（全ての i, j ペア（$i \neq j$）について $a_{ij} = 1$）を仮定する．時刻 n での発言者を e_n と記し（$e_n \in (0, \dots, N-1)$），$\boldsymbol{e} \stackrel{\text{def}}{=} (e_1, e_2, \dots)$ と定める．さらに，時刻 1 での意見変数（初期意見）が $\boldsymbol{u} = (u_0, \dots, u_{N-1})$ に等しいときの合意結果を $G(\boldsymbol{u})$ により表し，初期意見が $\boldsymbol{u}$ に等しく e_1（最初の発言者）が与えられたときの合意結果を $G(\boldsymbol{u}, e_1)$ で表す．最初の発言者が k のとき，時刻 2 での意見変数は以下で定まる．

$$\boldsymbol{x}(2) = (1 - w)\boldsymbol{u} + w u_k \boldsymbol{1}.$$

[1] 例えば，最初の発言者が誰であるかに合意結果は依存する．

ここで $\mathbf{1}$ は全ての要素が 1 の横ベクトルである．次の補題が成立する．

補題 4.1. a および b を定数とすると

$$G\left(a\boldsymbol{u}+b\mathbf{1}\right)=aG(\boldsymbol{u})+b\mathbf{1}.$$

補題 4.1 より，$\boldsymbol{x}(2)$ を初期意見として合意形成を始めたときの合意結果は

$$G(\boldsymbol{x}(2))=G\left((1-w)\boldsymbol{u}+wu_k\mathbf{1}\right)=(1-w)G(\boldsymbol{u})+wu_k.$$

$G(\boldsymbol{x}(2))$ は最初の発言者が k のときの合意結果に等しいはずであることから

$$G(\boldsymbol{u},k)\stackrel{f}{=}(1-w)G(\boldsymbol{u})+wu_k(0).$$

ここで $\stackrel{f}{=}$ は分布として等しいことを表す．従って，一般に以下が成立する．

$$G(\boldsymbol{u})\stackrel{f}{=}(1-w)G(\boldsymbol{u})+wH(\boldsymbol{u}). \qquad (1)$$

ここで $H(\boldsymbol{u})$ は確率 p_i で u_i を取る確率変数である．(1) は，確率変数 $H(\boldsymbol{u})$ に従う意見が外部からある集団に対して絶えずブロードキャストされ，外部意見に基づいて集団内で意見更新が行われても集団内の意見の分布に影響しないならば，そのときの集団の意見が初期意見 $\boldsymbol{u}$ から合意形成を始めたときの合意結果に等しいことを表している．

4.1. 2 名による合意形成

2 名による合意形成（$N=2$）について考察する．時刻 n での発言者を e_n と記し（$e_n=0,1$），$\boldsymbol{e}\stackrel{\mathrm{def}}{=}(e_1,e_2,\ldots)$ と定める．合意結果は $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{u}$ により一意に定まるので，$G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e})$ と記す．一般性を損なうことなく，$\boldsymbol{u}=(0,1)$ であることを仮定する．

まず $w=\frac{1}{2}$ の場合を考察する．この場合，$\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,\ldots)$ が与えられたときの収束先の意見は

$$G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_n}{2^n},$$

であることが容易に確かめれる．つまり，$G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e})$ は二進展開の係数が $\boldsymbol{e}$ で与えられる $[0,1]$ 上の実数に等しい．特に，$p_1=p_2=1/2$ のときは $\boldsymbol{e}$ の実現値は等確率で生じるので，$G(\boldsymbol{u})$ は $[0,1]$ 上に一様に分布する．事実，$\boldsymbol{u}=(0,1)$，$w=1/2$，かつ H が確率 $1/2$ で 0 か 1 を取る確率変数であれば，$G(\boldsymbol{u})$ が $[0,1]$ 上の一様分布のとき (1) は満たされる．

また，$w=\frac{2}{3}$ のとき

$$G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2e_n}{3^n},$$

が成り立つことがわかる．つまり，合意結果は Cantor 集合に含まれ，したがって合意結果がなす集合のルベーグ測度は 0 である．

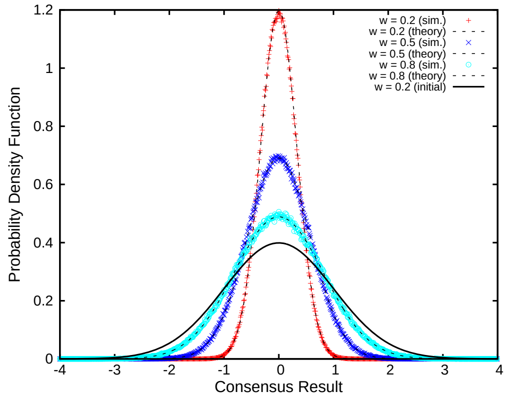

図 1: 合意結果の分布

4.2. 初期意見が正規分布に従う場合

ノード数 N が十分大きく，各ノードが有する初期意見が平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従って連続的に分布するとみなせるケースを想定する．このとき，(1) より G は初期意見とは独立な平均 μ，分散 $\frac{w\sigma^2}{2-w}$ の正規分布に従うことがわかる．$w=1$ のときは初期意見と合意先の意見の分布が一致し，$w\to 0$ の極限で，合意先の意見は μ に収束する．つまり，相手の意見にとらわれず，自分の意見を貫く割合が多いほど，結果的に意見が収束するという皮肉な結果となる．

図 1 は初期意見が標準正規分布（平均 0，分散 1 の正規分布）に従う場合について，シミュレーションを 1,000,000 回行い，合意結果の分布を求めた結果である．$N=1000$，w は 0.2，0.5，0.8 の 3 通りとした．点がシミュレーションで求めた分布（確率密度関数），点線が平均 0，分散 $\frac{w}{2-w}$ の正規分布の確率密度関数である．実線は，初期意見の分布である．シミュレーションと理論の結果は一致し，w が小さいほど，分布の幅（分散）が小さくなることが確認できる．

参考文献

[1] M.H. DeGroot, “Reaching a consensus,” Journal of the American Statistical Association, vol.69, no.345, pp.118–121, 1974.

[2] 塩村 尊，“適応型合意形成過程の基礎理論，” 情報処理学会論文誌，vol.48，no.11，pp.3501–3509，2007.

[3] F. Fagnani and S. Zampieri, “Randomized consensus algorithms over large scale networks,” IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol.26, no.4, pp.634–649, 2008.

[4] T.C. Aysal, M.E. Yildiz, A.D. Sarwate, and A. Scaglione, “Broadcast gossip algorithms for consensus,” IEEE Transactions on Signal processing, vol.57, no.7, pp.2748–2761, 2009.