日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 秋季研究発表会

サービスシェアリングのある待ち行列モデルの数値計算法

千葉大学 *松尾容典 MATSUO Yosuke
01207040 千葉大学 塩田茂雄 SHIODA Shigeo

1. はじめに

街ち行列理論では，通常，1 人の客が 1 つのサービス窓口を占有してサービスを受ける場合を想定している．しかし，現実には，複数の客が 1 つのサービス窓口を同時に利用する「サービスのシェアリング」が許されるケースも存在する．本稿では，文献 [1] において取り上げげたサービスシェアリングを許す待ち行列モデルの定常状態確率の数値計算法について考察する．

2. モデルの定義

1 人でサービスを受ける客（タイプ 1）と最大 G 人のグループを組みサービスをシェアリングする客（タイプ 2）が混在するモデルを考察する．タイプ 1 とタイプ 2 の客はそれぞれ到着率 λ_1 および λ_2 のポアソン過程に従って到着する．客のサービス規律は基本的に FIFO に従うが，タイプ 2 の客は行列内に G 人未満のグループが存在すれば，そのグループに加入する．客のサービス時間は客のタイプやグループの構成人数に関わらず平均 $1/\mu$ の指数分布に従う．

時刻 t における系内客数を $L(t)$ で表す（グループは構成人数にかかわらず 1 人としてカウントする）．また，未完成グループの待ち行列の先頭からの位置を $I(t)$，未完成グループの構成人数を $J(t)$ で表す．ただし，未完成グループが待ち行列に存在しない場合は $I(t) = J(t) = 0$ とする．また未完成グループに対してサービスが始まった場合,（構成人数が G 人未満であっても）サービス開始以降そのグループは完成グループとして扱うものとする．確率過程 $\{L(t), I(t), J(t); t \geq 0\}$ は連続時間マルコフ連鎖となる．待ち行列に並んでいる人数が l $(l \geq 0)$，未完成グループの位置 i $(2 \leq i \leq l)$，未完成グループの構成人数が j $(0 \leq j \leq G-1)$ の状態を (l, i, j) で表し，状態 (l, i, j) の定常状態確率を $q_{l,i,j}$ で表す．さらに，系内客数が l の定常状態確率ベクトルを辞書式に $\boldsymbol{q}_l \stackrel{\text{def}}{=} (q_{l,0,0}, q_{l,2,1}, \ldots, q_{l,2,N-1}, \ldots, q_{l,l,1}, \ldots, q_{l,l,N-1})$ と定める．なお，$q_0 \stackrel{\text{def}}{=} q_{0,0,0}$，$q_1 \stackrel{\text{def}}{=} q_{1,0,0}$ とする．

大域平衡方程式は以下のように表される．

$$q_0 Q_0^{(0)} + q_1 Q_{-1}^{(1)} = 0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{q}_{l-1} Q_{+1}^{(l-1)} + \boldsymbol{q}_l Q_0^{(l)} + \boldsymbol{q}_{l+1} Q_{-1}^{(l+1)} = 0. \tag{2}$$

$$(l = 1, 2, \ldots)$$

ブロック行列 $Q_{k,m}$ は次の通りである．

$$Q_0^{(0)} = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad Q_{-1}^{(1)} = \mu,$$
$$Q_{+1}^{(0)} = \lambda_1 + \lambda_2, \quad Q_0^{(1)} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu),$$

$$Q_{+1}^{(l)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \lambda_2 \boldsymbol{e}_1 \\ \mathbf{0}^\top & \lambda_1 I_{G-1} & O & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^\top & \cdots & O & \lambda_1 I_{G-1} & O \end{pmatrix},$$
$$(l = 1, 2, \ldots)$$

$$Q_{-1}^{(l)} = \begin{pmatrix} \mu & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mu \mathbf{1}^\top & O & \cdots & O \\ \mathbf{0}^\top & \mu I_{G-1} & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^\top & \cdots & O & \mu I_{G-1} \end{pmatrix},$$
$$(l = 2, 3, \ldots)$$

$$Q_0^{(l)} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) I_{l(G-1)+1} + \begin{pmatrix} 0 & O & \cdots & O \\ \lambda_2 \boldsymbol{e}_{G-1}^\top & \lambda_2 I_{G-1}^+ & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2 \boldsymbol{e}_{G-1}^\top & O & \cdots & \lambda_2 I_{G-1}^+ \end{pmatrix},$$
$$(l = 2, 3, \ldots)$$

$$I_n^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^\top & I_{n-1} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

ここで，$\mathbf{0}$ は全ての要素が 0 の横ベクトル，$\mathbf{1}$ は全ての要素が 1 の横ベクトル，$\boldsymbol{e}_n$ は $\mathbf{0}$ の n 番目の要素のみを 1 に置き換えた横ベクトルを表す．$M_k \stackrel{\text{def}}{=} (G-1)(k-1)+1$ とすると，ブロック行列 $Q_m^{(k)}$ は $M_k \times M_{k+m}$ の行列であり，レベル k に依存するサイズを有する．つまり，本待ち行列モデルは，レベル依存準出生死滅過程（レベル依存 QBD）になる．

3. 数値計算アルゴリズム

3.1. アルゴリズムの概要

本章では，文献 [2, 3] で提案されているレベル依存する M/G/1 型マルコフ連鎖の定常状態確率計算法を

用いて，本モデルの定常状態確率を計算するアルゴリズムを説明する．まず，レベル $k+1$ の定常状態確率と k の定常状態確率を関係づける行列 Z_k を以下で定義する．

$$\boldsymbol{q}_k = \boldsymbol{q}_{k+1} Z_k.$$

$\{Z_k\}$ は以下で漸化的に求まることが大域平衡方程式より導かれる．

$$Z_0 = Q_{-1}^{(1)} \left(-Q_0^{(0)}\right)^{-1},$$
$$Z_k = Q_{-1}^{(k+1)} \left(-Q_0^{(k)} - Z_{k-1} Q_{+1}^{(k-1)}\right)^{-1}. \quad (k = 1, 2, \dots)$$

したがって，あるレベル N において，そのレベルの定常状態確率ベクトル $\boldsymbol{q}_N$ の向き $\tilde{\boldsymbol{q}}_N \stackrel{\text{def}}{=} c\boldsymbol{q}_N$（定数 c は未知で良い）が求まれば，N 以下のレベルで正規化した定常状態確率 $(\overline{\boldsymbol{q}}_0(N), \overline{\boldsymbol{q}}_1(N), \dots, \overline{\boldsymbol{q}}_N(N))$ を次式で計算できる．

$$\overline{\boldsymbol{q}}_k(N) = \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_N Z_{N-1} Z_{N-2} \dots Z_k}{\sum_{l=0}^{N} \tilde{\boldsymbol{q}}_N Z_{N-1} Z_{N-2} \dots Z_l \boldsymbol{1}^\top}.$$

$\tilde{\boldsymbol{q}}_N$ は，行列 $U_{k,N} \stackrel{\text{def}}{=} Z_k Z_{k-1} \dots Z_N$ の任意の行ベクトルが $k \to \infty$ の極限で $\tilde{\boldsymbol{q}}_N$（の定数倍）に収束するという事実から計算する．具体的には，十分大きい k において

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_N = \frac{\boldsymbol{1} U_{k,N}}{\boldsymbol{1} U_{k,N} \boldsymbol{1}^\top}.$$

で定める（この場合 $\tilde{\boldsymbol{q}}_N$ はその要素の和が 1 に正規化される）．k の選び方については文献 [2] を参照のこと．

3.2. N の選び方

レベル 0 とレベル N の定常状態確率 q_0，$\boldsymbol{q}_N$ は

$$q_0 = \boldsymbol{q}_N U_{N-1,0},$$
$$U_{N-1,0} = Z_{N-1} Z_{N-2} \dots Z_0,$$

で関係づけられる．レベル 0 の状態数は 1 であるので，$U_{N-1,0}$ は $M_N \times 1$ の行列（つまり縦ベクトル）であることに注意する．$U_{N-1,0}$ の最小要素を u_{N-1}^{min} とおくと

$$q_0 = \boldsymbol{q}_N U_{N-1,0} \geq u_{N-1}^{min} \boldsymbol{q}_N \boldsymbol{1}^\top$$

したがって $u_{N-1}^{min} > 0$ であれば

$$\frac{\boldsymbol{q}_N \boldsymbol{1}^\top}{q_0} = \frac{\overline{\boldsymbol{q}}_N(N) \boldsymbol{1}^\top}{\overline{q}_0(N)} \leq \frac{1}{u_{N-1}^{min}}.$$

上式の左辺はレベル 0 とレベル N の定常状態確率の比を与えているので，N を増加させながら u_{N-1}^{min} を評価し，上式の右辺が初めて閾値（例えば 10^{-10}）を下回ったところで N を定めれば，$(\overline{q}_0(N), \overline{q}_1(N), \dots, \overline{\boldsymbol{q}}_N(N))$ は $(q_0, q_1, \dots, \boldsymbol{q}_N)$ に十分近いことが期待できる．

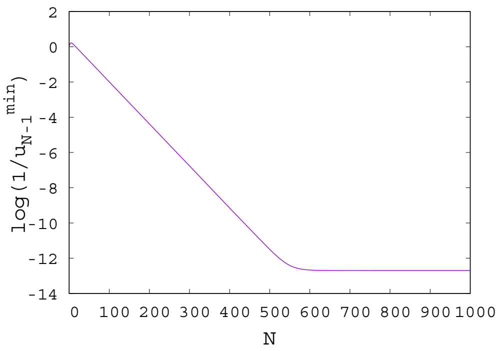

図 1: N を動かしたときの $1/u_{N-1}^{min}$ の変化

4. 数値計算例

本稿で扱ったサービスシェアリングのある待ち行列モデルの安定条件は $\rho_1 + \rho_2/G < 1$（$\rho_1 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1/\mu$，$\rho_2 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_2/\mu$）であることが確認されている [1]．数値例として，前章で説明したアルゴリズムにより，$\lambda_1 = 0.7$，$\lambda_2 = 0.5$，$\mu = 1$，$G = 2$（$\rho_1 + \rho_2/G = 0.95$）の時の定常状態確率を計算した．3.2 節で説明したアルゴリズムでは，まず N を 0 から増加させながら $Z_N, U_{N,0}$ を計算し，$1/u_{N-1}^{min}$ の値が閾値以下となる N を見つける必要がある．N を 1000 まで増加させながら，$1/u_{N-1}^{min}$ を計算した結果を図 1 に示す．N の増加に伴い，$1/u_{N-1}^{min}$ は指数関数的に減少する．なお，$N = 600$ 以降，$1/u_{N-1}^{min}$ が変化していないのは，桁落ちなど数値計算の精度の問題による可能性がある．$1/u_{N-1}^{min}$ が最初に 10^{-10} を下回ったのは，$N = 436$ の時であったため，$N = 436$ として 3.1 節のアルゴリズムにより，$\tilde{\boldsymbol{q}}_N$ を求め，さらに N 以下の各レベルの定常状態確率を計算し，平均待ち行列長（18.84）を求めた．この平均待ち行列長はシミュレーション結果と一致することを確認している．

参考文献

[1] 松尾容典, 鶴見星花, 塩田茂雄, 客のグルーピングのある待ち行列の安定条件: ドリフト条件による導出, 2018 年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」報文集 (2019), 1-10.

[2] M. Kimura and T. Takine, Computing the conditional stationary distribution in Markov chains of level-dependent M/G/1-type, 34, (2018), 207-238.

[3] T. Takine, Analysis and computation of the stationary distribution in a special class of level-dependent M/G/1-type and its application to BMAP/M/∞ and BMAP/M/c+M queues, Queueing Systems, 84, (2016), 49-77.