日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 秋季研究発表会

$G^X/G/\infty$ 待ち行列の安定性と Borel-Cantelli の補題

01307080　早稲田大学　豊泉洋　TOYOIZUMI Hiroshi

1. はじめに

GAFA(Google、Amazon.com、Facebook、Apple) に代表される巨大なサービス提供者は、ネットを媒介にして生じる変動の激しい需要に対応するために、即座にリソースを増やす必要がある。このような状況を、変動の激しい到着過程を持つ集団到着無限サーバー待ち行列によってモデル化し、この無限サーバー待ち行列が安定し、サービスを安定的に供給できるかを理論的に検討する。

集団サイズ X の変動が激しく期待値を持たないような場合でも、滞在時間 S が裾の軽い分布を持つ場合のシステムが安定すること [1, 2]、特に、$E[\max_{1\le i\le X} S_i] < \infty$ が、$M^X/G/\infty$ 待ち行列の安定するための必要十分条件であることが知られている [3]。条件 $E[\max_{1\le i\le X} S_i] < \infty$ は、集団サイズが滞在時間とうまくバランスし、$E[S^p] < \infty$ かつ $E[X^{1/p}] < \infty$ となる $p \in (0, \infty]$ が存在する場合に成立する [3]。

以下では、より一般的に、変動が激しい到着を持つ $G^X/G/\infty$ 待ち行列での安定性を、Borel-Cantelli の補題を用いて考察する。

2. 変動が激しい到着を持つ $G^X/G/\infty$ 待ち行列

システムがスタートしてから十分時間が経過した $G^X/G/\infty$ 待ち行列を考える。客の集団の到着時点列を $\cdots < T_{-1} < T_0 \le 0 < T_1 < T_2 < \dots$ とし、時刻 0 での系内客数を評価する。サーバーが無限にあるので、時刻 T_n に到着したサイズ X_n の集団の各客は直ちにサービスを開始し、滞在時間 $S_{n,1}, S_{n,2}, \dots, S_{n,X_n}$ 後にシステムを退去する。この到着過程は $Z_n = (X_n, S_{n,1}, S_{n,2}, \dots, S_{n,X_n})$ をマークにするマーク付き点過程と考えることができる。

以下では、到着間隔や集団サイズさらに各客の滞在時間には独立性を仮定しない。ただし、集団の到着レート λ は有限とし、集団サイズの変動は激しく $P(X = \infty) = 0$ だが $E[X] = \infty$ も許容する。

時刻 0 での系内客数を L とする。時刻 T_{-k} に到着した集団内の客 i が時刻 0 でシステム内に存在する事象を $A_{-k,i}$ とすると、$A_{-k,i} = \{S_{-k,i} > -T_{-k}\}$ なので、L は以下のように表せる。

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{X_{-k}} 1_{A_{-k,i}}.$$

3. 系内客数の安定性と Borel-Cantelli の補題

時刻 T_{-k} に到着した客のうち少なく一人でもシステム内に留まっている事象を B_{-k} とすると、

$$B_{-k} = \{\max_{1\le i\le X_{-k}} S_{-k,i} > -T_{-k}\}$$

であり、

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} 1_{B_{-k}} \tag{1}$$

は、集団を一つのスーパー客とし、そのサービス時間を $\max_{1\le i\le X_k} S_i$ と見たときの時刻 0 での系内客数を表している。ここで、単調収束定理から

$$E[M] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} 1_{B_{-k}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k) \tag{2}$$

であり、もし $E[M] < \infty$ ならば $P(M < \infty) = 1$ が言える。

一方、独立とは限らない事象列 $B_0, B_{-1}, \dots$ に対して Borel-Cantelli の補題を使うと、

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(B_{-k}) < \infty$$

のとき、

$$P(B_{-k} \text{ i.o.}) = P(\limsup_{k\to\infty} B_{-k}) = 0$$

が成立する。B_{-k} i.o. は、事象列 $B_0, B_{-1}, \dots$ の中で無限回起こる事象を表し、(1) より M はその回数をカウントしたものに他ならないので、

$$P(M < \infty) = 1 - P(M = \infty) = 1 - P(B_{-k} \text{ i.o.})$$

となる。したがって、(2) より、Borel-Cantelli の補題は $E[M] < \infty$ ならば $P(M < \infty) = 1$ と同等である。[4] では、同様の議論により $E[M] < \infty$ ならば $P(M < \infty) = 1$ を使って Borel-Cantelli の補題を示している。

4. $G/G/\infty$ 待ち行列の安定性条件

スーパー客を考えた $G/G/\infty$ 待ち行列では、スーパー客の到着率が $\lambda < \infty$ であり、その滞在時間は $\max_{1 \leq i \leq X_k} S_i$ である。滞在時間の期待値 $E[\max_{1 \leq i \leq X} S_i]$ が有限のとき、Little の公式より、

$$E[M] = \lambda E\left[\max_{1 \leq i \leq X} S_i\right] < \infty$$

となり、前節の議論より $P(M < \infty) = 1$ であり、$G/G/\infty$ 待ち行列は安定する。一般に、$G/G/\infty$ 待ち行列では、到着レートと滞在時間の期待値が有限の場合には、待ち行列が安定することが知られている [5, p133]。

5. $G^X/G/\infty$ 待ち行列の安定性

集団の到着率 λ と期待値 $E[\max_{1 \leq i \leq X} S_i]$ が有限のときには、前節の議論よりスーパー客の $G/G/\infty$ 待ち行列は安定し、$P(M < \infty) = 1$ である。よって、

$$L \leq \sum_{k=0}^{\infty} 1_{B_{-k}} X_{-k}$$

は有限和となり、L も有限となる。したがって、次の定理が成立する。

Theorem 1. 集団の到着率 λ と期待値 $E[\max_{1 \leq i \leq X} S_i]$ が有限のとき、$P(L < \infty) = 1$ であり、$G^X/G/\infty$ 待ち行列は安定する。

さらに、Borel-Cantelli の第 2 補題より、事象列 $B_0, B_{-1}, \ldots$ が独立のとき、

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(B_{-k}) = \infty$$

のとき、

$$P(B_{-k} \text{ i.o.}) = P(\limsup_{k \to \infty} B_{-k}) = 1$$

が成立する。この場合、$E[M] = \sum_{k=0}^{\infty} P(B_{-k}) = 1$ ならば $P(M = \infty) = 1$ となり、さらに $L \geq M$ なので、$P(L = \infty) = 1$ が成立する。異なる集団間での客の滞在時間が独立な $M^X/G/\infty$ 待ち行列では、事象列 $B_0, B_{-1}, \ldots$ が独立になるので、[3] では確率母関数を使って得た既知の定理が成立する。

Theorem 2. 異なる集団間での客の滞在時間が独立な $M^X/G/\infty$ 待ち行列で、期待値 $E[\max_{1 \leq i \leq X} S_i]$ が無限のとき、$P(L = \infty) = 1$ であり、$M^X/G/\infty$ 待ち行列は爆発する。

参考文献

[1] T. D. Cong, "On the $M^X/G/\infty$ queue by heterogeneous customers in a batch," *Journal of Applied Probability*, vol. 31, no. 1, pp. 280–286, 1994.

[2] M. Yajima, T. Phung-Duc, and H. Masuyama, "The stability condition of BMAP/M/∞ queues," *ACM electric arvhive*, 2017.

[3] 豊泉 洋, "変動の激しい到着過程をもつ無限サーバー待ち行列," in 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, pp. 68–69, 2018.

[4] K. Sigman, "Borel-Cantelli lemmas." Lecture Note, 2009.

[5] F. Baccelli and P. Brémaud, *Elements of queueing theory: Palm Martingale calculus and stochastic recurrences*, vol. 26. Springer Science & Business Media, 2013.