日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 秋季研究発表会

GI/G/1 型マルコフ連鎖の劣幾何エルゴード条件

05001142　京都大学　*川口和樹　KAWAGUCHI Kazuki
01606724　京都大学　増山博之　MASUYAMA Hiroyuki

1. はじめに

ランダムウォーク型マルコフ連鎖は, 現状態を添字集合とする増分分布族が tight となるマルコフ連鎖であり, マルコフ連鎖モンテカルロ法や, 待ち行列理論との関わりが深い [1].

例えば, 対称ランダムウォーク Metropolis 法および Langevin モンテカルロ法の挙動, さらには, マルコフ型到着過程と位相型サービス時間分布を入力とする MAP/PH/c 待ち行列長過程などは, ランダムウォーク型マルコフ連鎖となる.

ランダムウォーク型マルコフ連鎖においては,「増分分布の裾減衰速度」と「エルゴード性の強さ」との間に, 強い関連があることが知られている. しかし, 劣幾何エルゴード的, すなわち, 極限分布への収束速度が劣幾何的となる場合では, その二者間の関係性はまだ十分に解明されていない.

本稿では, そうした未解明な関係性を明らかにすべく, その第一歩として, 代表的なランダムウォーク型マルコフ連鎖である, GI/G/1 型マルコフ連鎖を対象に, 劣幾何エルゴード性に関する必要十分条件を与える.

2. GI/G/1 型マルコフ連鎖

まず, 自然数 M_k に対して, $\mathbb{M}_k = \{1,2,\dots,M_k\}$ とし, $\mathbb{S} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{L}_k$ とする. ただし, 任意の $k \in \mathbb{Z}_+ := \{0,1,\dots\}$ に対して, $\mathbb{L}_k = \{k\} \times \mathbb{M}_{\min\{1,k\}}$ とする. このとき, 推移確率行列

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ \mathbb{L}_0 \\ \mathbb{L}_1 \\ \mathbb{L}_2 \\ \mathbb{L}_3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbb{L}_0 & \mathbb{L}_1 & \mathbb{L}_2 & \mathbb{L}_3 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3 & \cdots \\ \boldsymbol{B}_{-1} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots \\ \boldsymbol{B}_{-2} & \boldsymbol{A}_{-1} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots \\ \boldsymbol{B}_{-3} & \boldsymbol{A}_{-2} & \boldsymbol{A}_{-1} & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

をもつ 2 変数マルコフ連鎖 $\{(X_n, J_n) \in \mathbb{S}; n \in \mathbb{Z}_+\}$ を GI/G/1 型とよぶ. ただし, $\boldsymbol{A}_k$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$ は $M_1 \times M_1$ 行列, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{B}_k$ および $\boldsymbol{B}_{-k}$ $(k \in \mathbb{N} := \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\})$ はそれぞれ, $M_0 \times M_0$ 行列, $M_0 \times M_1$ 行列, $M_1 \times M_0$ 行列である.

本研究では, 次の条件を仮定する.

仮定 1.

(i) $\boldsymbol{P}$ は既約かつ非周期である.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} k\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{e}$ は有限である.

(iii) $\boldsymbol{A} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ は既約な確率行列である.

(iv) $\sigma := \boldsymbol{\varpi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{e} < 0$ を満たす. ただし, $\boldsymbol{\varpi}$ は $\boldsymbol{A}$ の唯一の定常分布ベクトルであり, $\boldsymbol{e}$ はすべての要素が 1 に等しい列ベクトルである.

本仮定のもとで, GI/G/1 型マルコフ連鎖はエルゴード的, すなわち, 既約で非周期かつ正再帰的となり, $\boldsymbol{P}$ は唯一の定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ をもつ.

3. 関連研究

劣幾何エルゴード性の特別な場合である冪エルゴード性については, 簡便な必要十分条件が知られている [2]. また, 次の命題は, 状態空間 $\mathbb{S}$ 上の一般的なマルコフ連鎖が劣幾何エルゴード性をもつための十分条件を与えている.

命題 2 ([4, Theorem 2.1])**.** 推移確率行列 $\boldsymbol{P} = (p(k,i;\ell,j))_{(k,i),(\ell,j)\in\mathbb{S}}$ は既約かつ非周期的であるとする. さらに, ある定数 $b \in (0,\infty)$, 劣幾何関数 $r : \mathbb{S} \to [0,\infty)$, および, ある有限集合 $\mathbb{A} \subset \mathbb{S}$ 上で有界な関数 $V_n : \mathbb{S} \to [1,\infty]$ の列 $\{V_n; n = 0,1,\dots\}$ に対して, 次の (i), (ii) が成り立つとする.

(i) $V_0(k,i) = \infty \Longrightarrow V_1(k,i) = \infty$.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{Z}_+$, $(k,i) \in \mathbb{S}$ に対して,

$$\sum_{(\ell,j)\in\mathbb{S}} p(k,i;\ell,j)V_{n+1}(\ell,j) \le V_n(k,i) - r(n) + br(n)1_{\mathbb{A}}(k,i). \tag{1}$$

以上の条件のもとで, 任意の確率ベクトル $\boldsymbol{\mu} := (\mu(k,i))_{(k,i)\in\mathbb{S}}$ について, 次式が成立する.

$$\lim_{n\to\infty} r(n)\|\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{P}^n - \boldsymbol{\pi}\| = 0.$$

ただし, $1_{\mathbb{A}} : \mathbb{S} \to \{0,1\}$ は次を満たす関数とする.

$$1_{\mathbb{A}}(k,i) = \begin{cases} 1, & (k,i) \in \mathbb{A}, \\ 0, & (k,i) \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{A}. \end{cases}$$

命題 2 の十分条件は, 一般的なマルコフ連鎖を対象としているが, 可算無限個のリアプノフ関数 V_n を必要とするため, 扱いづらい.

4. 劣幾何エルゴード条件

本研究では, 一般的な劣幾何エルゴード性についての簡便な必要十分条件を与える. 次の定理は, 本研究の主結果である.

定理 3. 仮定 1 のもとで, 次の条件 (A), (B) は同値である.

(A) 任意の $\lambda \in (0,\delta)$ に対して, $\sum_{k=1}^{\infty} V(\lambda k)\boldsymbol{A}_k$ および $\sum_{k=1}^{\infty} V(\lambda k)\boldsymbol{B}_k$ がともに有限となる.

(B) 任意の $\theta \in (0,\delta|\sigma|)$ および任意の確率ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ に対して, 次が成立する.

$$\lim_{n\to\infty} V'(\theta n)\|\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{P}^n - \boldsymbol{\pi}\| = 0.$$

ただし, δ は正定数であり, 関数 $V : [0,\infty) \to [1,\infty)$ は, 次を満たす二回微分可能な凸関数である.

(i) $V'(0) \ge 1$ かつ $\lim_{x\to\infty} V'(x) = \infty$.

(ii) $\log V'(x)/x$ は非増加で 0 に収束する.

4.1. 十分性

まず, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, リアプノフ関数 $V_n : \mathbb{S} \to [1,\infty)$ を以下のように定義する.

$$V_n(k,i) = \begin{cases} V(n\theta), & k = 0, \\ V(ck+n\theta) + cV'(ck+n\theta)x^+(i), & k \ge 1. \end{cases}$$

ただし, $c \in (0,\delta), \theta \in (0,\delta|\sigma|)$ とし, 正の列ベクトル $\boldsymbol{x}^+ := (x^+(i))_{i\in\mathbb{M}_1}$ を, 方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - |\sigma|\boldsymbol{e} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{e},$$

の解とする. さらに, 詳細は割愛するが, 定数 b と集合 $\mathbb{A} = \bigcup_{k=0}^{K} \mathbb{L}_k$ を適当に定めることで, (1) を満たすようにできる. つまり, 条件 (A) のもとで, 命題 2 の条件が満たされ, その結果, 条件 (B) の成立が言える.

4.2. 必要性

本節では, 条件付き確率 $\mathrm{P}(\,\cdot\,|\,(X_0,J_0)=(k,i))$ と条件付き期待値 $\mathrm{E}[\,\cdot\,|\,(X_0,J_0)=(k,i)]$ をそれぞれ $\mathrm{P}_{(k,i)}(\cdot)$, $\mathrm{E}_{(k,i)}[\cdot]$ と表記する.

条件 (B) が成立するとき, 状態 $\mathbb{L}_0$ への初到達時刻 $\tau_{\mathbb{L}_0} = \inf\{n \in \mathbb{N}; X_n = 0\}$ に関して, 次が成立する [3].

$$\mathrm{E}_{(k,i)}\left[\sum_{\ell=1}^{\tau_{\mathbb{L}_0}} V'(\theta\ell)\right] < \infty, \quad (k,i) \in \mathbb{S}. \qquad (2)$$

関数 V の凸性と平均値の定理より, (2) は次のように書き換えることが可能である.

$$\mathrm{E}_{(k,i)}[V(\theta\tau_{\mathbb{L}_0})] < \infty, \quad (k,i) \in \mathbb{S}. \qquad (3)$$

この期待値をマルコフ不等式によって下から評価するために, 次の補題を用いる (証明は割愛).

補題 4. k を十分大きくとれば, ある定数 $C > 0$ があって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次が成立する.

$$\mathrm{P}_{(k,i)}\left(\tau_{\mathbb{L}_0} > \frac{k}{|\sigma|+\varepsilon}\right) \ge C, \quad i \in \mathbb{M}_1.$$

補題 4 より, $\lambda = \theta/(|\sigma|+\varepsilon)$ とし, $X_0 = k$ を十分大きく取ることで, 次の不等式を得る.

$$\mathrm{E}_{(k,i)}[V(\theta\tau_{\mathbb{L}_0})] \ge CV(\lambda k), \quad i \in \mathbb{M}_1. \qquad (4)$$

なお, $\varepsilon > 0, \theta \in (0,\delta|\sigma|)$ は任意に取れるので, 不等式 (4) は, 任意の $\lambda \in (0,\delta)$ に対して成立する. また, (3) と (4) より, 十分大きい $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_{(k,i)}[V(\theta\tau_{\mathbb{L}_0})] \\ &\ge \sum_{\substack{\ell=N+1 \\ j\in\mathbb{M}_1}}^{\infty} p(k,i;\ell,j)\mathrm{E}_{(\ell,j)}[V(\theta\tau_{\mathbb{L}_0})] \\ &\ge C\sum_{\ell=N+1}^{\infty} V(\lambda\ell)\sum_{j\in\mathbb{M}_1} p(k,i;\ell,j) \\ &= \begin{cases} C\sum_{\ell=N+1}^{\infty} V(\lambda\ell)[\boldsymbol{B}_\ell\boldsymbol{e}]_i, & (k,i) \in \mathbb{L}_0, \\ C\sum_{\ell=N+1}^{\infty} V(\lambda\ell)[\boldsymbol{A}_{\ell-1}\boldsymbol{e}]_i, & (k,i) \in \mathbb{L}_1, \end{cases} \end{aligned}$$

が導かれる. ただし, $[\cdot]_i$ は列ベクトルの第 i 成分, $p(k,i;\ell,j)$ は $\mathrm{P}_{(k,i)}((X_1,J_1)=(\ell,j))$ を表す. この結果と (3) より, 条件 (A) の成立が示される.

参考文献

[1] S.F. Jarner and R.L. Tweedie, "Necessary conditions for geometric and polynomial ergodicity of random-walk-type," *Bernoulli*, vol. 9, no. 4, pp. 559–578, 2003.

[2] Y. Mao, Y. Tai, Y.Q. Zhao and J. Zou, "Ergodicity for the GI/G/1-type Markov Chain," *J. Appl. Probab.*, vol. 9, no. 1, pp. 31–44, 2014.

[3] E. Nummelin and P. Tuominen, "The rate of convergence in Orey's theorem for Harris recurrent Markov chains with applications to renewal theory," *Stoch. Proc. Appl.*, vol. 13, no. 3, pp. 295–311, 1983.

[4] P. Tuominen and R. Tweedie, "Subgeometric rates of convergence of *f*-ergodic Markov Chains," *Adv. Appl. Probab.*, vol. 26, no. 3, pp. 775–798, 1994.