M/G/1 型マルコフ連鎖に対するレベル増分切断近似の漸近公式

05001139　京都大学　*大内克久　OUCHI Katsuhisa
01606724　京都大学　増山博之　MASUYAMA Hiroyuki

1. はじめに

マルコフ的な背後環境をもつ待ち行列の定常解析は, 多くの場合, M/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布を求める問題に帰着される. M/G/1 型マルコフ連鎖はレベル変数とフェーズ変数から成り, その推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ は, 以下のようにレベルごとに区切られた構造を有する.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}(0) & \boldsymbol{B}(1) & \boldsymbol{B}(2) & \boldsymbol{B}(3) & \cdots \\ \boldsymbol{B}(-1) & \boldsymbol{A}(0) & \boldsymbol{A}(1) & \boldsymbol{A}(2) & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}(-1) & \boldsymbol{A}(0) & \boldsymbol{A}(1) & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}(-1) & \boldsymbol{A}(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

そして, 次の仮定の下で, $\boldsymbol{P}$ は唯一の定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ をもつ.

仮定 1.

(i) $\boldsymbol{P}$ は既約である.

(ii) $\boldsymbol{A} := \sum_{k=-1}^{\infty} \boldsymbol{A}(k)$ は既約な確率行列である.

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} k\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{e}$ は有限である.

(iv) $\sigma := \boldsymbol{\varpi} \sum_{k=-1}^{\infty} k\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{e} < 0$ を満たす. ただし, $\boldsymbol{\varpi}$ を $\boldsymbol{A}$ の唯一の定常分布ベクトルとする.

M/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ は, Ramaswami の再帰式を基礎とする M/G/1 パラダイムによって構成できるが, その構成法を計算機に実装する際には, 推移を特徴づけるブロック行列の無限列 $\{\boldsymbol{A}(k); k \in [-1,\infty)\}$, $\{\boldsymbol{B}(k); k \in [-1,\infty)\}$ を切断する必要がある. 具体的には, 切断パラメータ (レベル増分の上限) N を定め, 無限列 $\{\boldsymbol{A}(k); k \in [-1,\infty)\}$, $\{\boldsymbol{B}(k); k \in [-1,\infty)\}$ を, 実質的に有限列である, 以下の $\{\boldsymbol{A}^{(N)}(k); k \in [-1,\infty)\}$, $\{\boldsymbol{B}^{(N)}(k); k \in [-1,\infty)\}$ でそれぞれ置き換える.

$$\boldsymbol{A}^{(N)}(k) = \begin{cases} \boldsymbol{A}(k), & -1 \le k \le N-1, \\ \widetilde{\boldsymbol{A}}(N-1), & k = N, \\ \boldsymbol{O}, & k > N, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{B}^{(N)}(k) = \begin{cases} \boldsymbol{B}(k), & -1 \le k \le N-1, \\ \widetilde{\boldsymbol{B}}(N-1), & k = N, \\ \boldsymbol{O}, & k > N. \end{cases}$$

ただし, $\widetilde{\boldsymbol{A}}(k)$, $\widetilde{\boldsymbol{B}}(k)$ は劣確率的な行列であり, $\widetilde{\boldsymbol{A}}(k)\boldsymbol{e} = \overline{\boldsymbol{A}}(k)\boldsymbol{e} := \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \boldsymbol{A}(\ell)\boldsymbol{e}$, $\widetilde{\boldsymbol{B}}(k)\boldsymbol{e} = \overline{\boldsymbol{B}}(k)\boldsymbol{e} := \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \boldsymbol{B}(\ell)\boldsymbol{e}$ を満たす.

上記のようなブロック行列の置き換えは, 一推移あたりのレベル増分を切断することと等価であり, これをレベル増分切断とよぶ. なお, レベル増分切断によって得られるマルコフ連鎖も M/G/1 型となり, その定常分布 $\boldsymbol{\pi}^{(N)}$ は当然, M/G/1 パラダイムによって計算可能である.

ところで, レベル増分切断によって得られる定常分布 $\boldsymbol{\pi}^{(N)}$ は, 元の M/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ に対する近似である. 本研究では, その近似誤差の評価を目標として, 切断パラメータ N を無限大に発散させたときの漸近公式を導く.

関連研究として, 最終列ブロック増大切断近似の誤差評価に関するものがある. 最終列ブロック増大切断近似は, 非境界部が同一サイズのブロックで仕切られた推移確率行列 (連続時間モデルの場合には推移率行列) を対象とし, その北西角の最終ブロック列を「ブロック増大」させ, 近似的な推移確率行列を構成する.

この最終列ブロック増大切断近似に対して, ブロック単調性の仮定のもとで, 陽的な誤差上界が示されており [1, 2, 3], ブロック単調性がない場合に対しても, 計算可能な誤差上界が与えられている [4]. また, [5] では, 本研究のように, M/G/1 型マルコフ連鎖を考え, 最終列ブロック増大切断近似によって得られる定常分布の誤差について, 上限レベルを無限大に発散させたときの漸近公式を導いている.

2. 劣幾何的漸近公式

本節では, レベル増分切断によって得られる定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}^{(N)}$ が, 元の定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ に劣幾何的な速度で収束する場合を考える.

そのためにまず, 離散型分布に対する裾の長い分布族を導入する. なお, 以下では, 任意の分布 (関数) F に対して, その補分布を $\overline{F}$ と表記する.

定義 2. $\overline{F}(k) > 0$ $(k = 0,1,2,\dots)$ かつ $\lim_{k\to\infty}\overline{F}(k+1)/\overline{F}(k) = 1$ であるとき, F は「裾の長い分布」といい, 裾の長い分布族を $\mathcal{L}$ と表す.

ついで, 以下の仮定をおく.

仮定 3. $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}(k) = \sum_{\ell=k+1}^{\infty}\overline{\boldsymbol{A}}(\ell)$ $(k \ge -3)$, $\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}(k) = \sum_{\ell=k+1}^{\infty}\overline{\boldsymbol{B}}(\ell)$ $(k \ge -2)$ とし, ある分布 $F \in \mathcal{L}$ と定ベクトル $\boldsymbol{c}_A, \boldsymbol{c}_B$ が存在して,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}(N)\boldsymbol{e}}{\overline{F}(N)} = \boldsymbol{c}_A, \quad \lim_{N\to\infty}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}(N)\boldsymbol{e}}{\overline{F}(N)} = \boldsymbol{c}_B.$$

ただし, $\boldsymbol{c}_A, \boldsymbol{c}_B$ のうち, 少なくともどちらか一方は非ゼロベクトルである.

ここで, $\boldsymbol{\pi}(k)$, $\boldsymbol{\pi}^{(N)}(k)$ をそれぞれ, $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}^{(N)}$ のレベル k に対応する部分ベクトルとし, さらに, $\overline{\boldsymbol{\pi}}(k) = \sum_{\ell=k+1}^{\infty}\boldsymbol{\pi}(\ell)$ $(k = 0,1,2,\dots)$ と定義すると, 以下の定理を得る.

定理 4. 仮定 1 と 3 が満たされるとき, 任意の $k = 0,1,2,\dots$ に対して, 次式が成り立つ.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\boldsymbol{\pi}^{(N)}(k) - \boldsymbol{\pi}(k)}{\overline{F}(N)} = \frac{\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{c}_B + \overline{\boldsymbol{\pi}}(0)\boldsymbol{c}_A}{-\sigma}\boldsymbol{\pi}(k).$$

3. 幾何的漸近公式

本節では, $\boldsymbol{\pi}^{(N)}$ が, 幾何的な速度で $\boldsymbol{\pi}$ に収束する場合を考える. まず, $\widehat{\boldsymbol{A}}(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} z^k \boldsymbol{A}(k)$, $\widehat{\boldsymbol{B}}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \boldsymbol{B}(k)$ と定義し, その収束半径を, それぞれ r_A, r_B とする. さらに, 以下の仮定をおく.

仮定 5.

(i) $r := \min(r_A, r_B) > 1$.

(ii) 以下を満たす非負関数 f と定ベクトル $\boldsymbol{c}_A$, $\boldsymbol{c}_B$ が存在する.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}(N)\boldsymbol{e}}{r^{-N}f(N)} = \boldsymbol{c}_A, \quad \lim_{N\to\infty}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}(N)\boldsymbol{e}}{r^{-N}f(N)} = \boldsymbol{c}_B,$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{f(N)}{f(N-1)} = 1.$$

ただし, $\boldsymbol{c}_A, \boldsymbol{c}_B$ のうち, 少なくともどちらか一方は非ゼロベクトルである.

定理 6. 仮定 1 と 5 が満たされるとき, 任意の $k = 0,1,2,\dots$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{\boldsymbol{\pi}^{(N)}(k) - \boldsymbol{\pi}(k)}{r^{-N}f(N)} \le \left\{\frac{r}{-\sigma} + 2(r-1)\xi\right\}\{\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{c}_B + \overline{\boldsymbol{\pi}}(0)\boldsymbol{c}_A\}\boldsymbol{\pi}(k),$$

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{\boldsymbol{\pi}^{(N)}(k) - \boldsymbol{\pi}(k)}{r^{-N}f(N)} \ge \left\{\frac{r}{-\sigma} - 2(r-1)\xi\right\}\{\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{c}_B + \overline{\boldsymbol{\pi}}(0)\boldsymbol{c}_A\}\boldsymbol{\pi}(k).$$

ただし, ξ は推移確率行列に依存する定数である.

定理 6 から次の系を導くことができる.

系 7. 仮定 1 と 5 のもとで,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}(N) - \overline{\boldsymbol{A}}(N)}{r^{-N}f(N)} = \boldsymbol{O},$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}(N) - \overline{\boldsymbol{B}}(N)}{r^{-N}f(N)} = \boldsymbol{O},$$

が満たされるとき, 任意の $k = 0,1,2,\dots$ に対して, 次式が成り立つ.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\boldsymbol{\pi}^{(N)}(k) - \boldsymbol{\pi}(k)}{r^{-N}f(N)} = \frac{r\{\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{c}_B + \overline{\boldsymbol{\pi}}(0)\boldsymbol{c}_A\}}{-\sigma}\boldsymbol{\pi}(k).$$

4. 結論と今後の課題

本研究では, M/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ とレベル増分切断近似 $\boldsymbol{\pi}^{(N)}$ との差をレベルごとに区切った $\boldsymbol{\pi}^{(N)}(k) - \boldsymbol{\pi}^{(N)}(k)$ の劣幾何的および幾何的漸近公式を導いた. その結果, $\boldsymbol{\pi}^{(N)}(k) - \boldsymbol{\pi}(k)$ の減衰速度は, レベル増分の平衡分布の減衰速度と漸近的に等しくなることがわかった.

今後の課題は, より実用的な誤差評価に向け, $\boldsymbol{\pi}^{(N)} - \boldsymbol{\pi}$ の全変動ノルムの漸近解析を行い, その結果を用いて, レベル増分切断近似 $\boldsymbol{\pi}^{(N)}$ に対する緊密かつ計算可能な誤差上界を導くことである.

参考文献

[1] H. Masuyama. Error bounds for augmented truncations of discrete-time block-monotone Markov chains under geometric drift conditions. *Adv. Appl. Probab.*, 47(1):83–105, 2015.

[2] H. Masuyama. Error bounds for augmented truncations of discrete-time block-monotone Markov chains under subgeometric drift conditions. *SIMAX*, 37(3):877–910, 2016.

[3] H. Masuyama. Continuous-time block-monotone Markov chains and their block-augmented truncations. *Lin. Alg. Appl.*, 514(1):105–150, 2017.

[4] H. Masuyama. Error bounds for last-column-block-augmented truncations of block-structured Markov chains. *JORSJ*, 60(3):271–320, 2017.

[5] H. Masuyama, T. Kimura, and Y. Katsumata. A subgeometric convergence formula for finite-level M/G/1-type Markov chains via the Poisson equation of the deviation matrix. *Preprint* arXiv:1809.03179, 2018.